新物理学シリーズ 19

山内 恭彦監修

場の量子論

京都大学数理解析研究所助教授 理学博士

中西 襄 著

培風館

はしがき

場の量子論は素粒子を量子化された場によって記述する理論である．本シリーズ 13“相対論的量子力学”においてすでに詳しく論じられているように，量子力学に相対論の要請をとりいれて満足な理論体系を作ろうとすれば必然的に場の量子論へ移行するのである．場の量子論は素粒子論の最もオーソドックスな理論であって，昔からしばしば両者は同義に使われてきた．一時期S行列理論的アプローチや群論的方法に主流を奪われたこともあったが，最近はまた場の量子論の重要性が再認識されてきている．場の量子論的な考え方がやはり本質的に正しい方向のものであるという見解は，今日大多数の素粒子物理学者の容認するところであろう．この信念は，場の量子論の構成の自然さと完全さ，そして量子電磁力学の驚異的な成功に支えられている．

場の量子論の教科書は日本語のものはまだ比較的少ないが，欧文のものはそれこそ“素粒子の種類数ほど”たくさん出版されている．これらの本の半翻訳的な切り継ぎをやるのはあまり有意義なこととは思えない．それで本書では今までに出版された教科書にはまだあまりとりあげられていない新しい理論を紹介することを主眼とした．したがって，本書は一面では場の量子論の入門書であるけれども，かなり高度の内容も含んでおり，場の量子論の専門家にも興味をもって頂けることと思っている．場の量子論をはじめて勉強する人は，難しいところは適当にとばし読みして頂いて差し支えない．

1 章では，1 節から 4 節まで予備知識として必要な事項を簡単にまとめた．ただし読者は初等集合論，行列および行列式，微積分学，古典力学などの基本的な事項についてはすでに熟知しているものと想定し，それらについてはとくに説明しなかった．5 節では素粒子論全般の粗略な展望を試みた．

2 章では，場の量子論の一般的な枠組を解説した．伝統的な Lagrange 形式にはあまりこだわらず，公理論的な考え方をかなりとりいれた．Lagrange 形式の一般論は形式的になりすぎるので付録にまわした．

3章では，電磁場の量子化の新しい理論形式の全貌を紹介した．これはまだ他のどの場の量子論の教科書にもとりあげられていないものである．

4章は有名な Feynman–Dyson の理論の解説で，ほぼ標準的な内容である．ただ従来あいまいなまま素通りされている組み合せ論的な考察はていねいに説明した．

5章では，Feynman 積分の Feynman パラメーター公式を論じた．Feynman 規則が今日これほど普及しているのに，それと一体であるべきパラメーター公式はまだあまり使われていないようである．本書がその普及に少しでも役立つことを願っている．

6章はくりこみ理論である．くりこまれた Feynman 積分が収束することの証明は，特別の専門書を除き今までの教科書はすべて昔ながらの直観に頼った議論のみを与えている．それは，厳密な証明が完成したのが比較的近年であり，しかも難解であったからであると思われる．ごく最近 Feynman パラメーター公式に基づく明快な厳密証明が与えられたので，本書ではそれを紹介することにした．

以上述べたように，本書の内容は応用よりも理論的基礎的な面に重点がおかれている．具体的な問題の計算は数例にとどめたが，それは場の量子論の計算は一般に複雑で長くなりすぎるからである．計算は本に書いてあるのをただたどるだけではだめで，読者自ら骨折ってやってみなければならない．

Feynman–Dyson の理論が実用上有効なのは電磁相互作用の場合であるので，本書では量子電磁力学を中心にして述べた．本シリーズですでに弱い相互作用の詳しい解説書が出されているので，あと強い相互作用の理論の本が書かれると素粒子論の全貌が見渡せることになる．

本書の原稿は新たな書きおろしでまだ講義にも使っていないものである．それゆえ，著者の偏見や思い違いがいくつかあるかもしれない．読者諸賢の御批判御叱正を仰ぐ次第である．

本書を書く機会を与えて下さった山内恭彦先生，本書執筆に関係した事務的なことを一切やって頂いた培風館の村山高志氏に感謝する．

1975 年 1 月

中 西　襄

目　次

1. 予備知識　1~43

1-1 解析関数…… 1
1-2 ベクトル空間…… 10
1-3 特殊相対論…… 18
1-4 量子力学…… 23
1-5 素粒子論…… 31
演習問題 1. …… 42

2. 第二量子化　44~98

2-1 生成消滅演算子…… 44
2-2 Poincaré 群の表現…… 52
2-3 場の演算子…… 59
2-4 自由スカラー場…… 62
2-5 自由スピノル場…… 71
2-6 不変デルタ関数…… 79
2-7 相互作用…… 85
2-8 Heisenberg 演算子の一般的性質…… 90
演習問題 2. …… 97

3. 量子電磁力学　99~155

3-1 電磁場の量子化の問題…… 99
3-2 不定計量の Hilbert 空間……105
3-3 自由な電磁場の共変的量子化……112
3-4 荷電場との相互作用……124
3-5 Heisenberg 表示での電磁場……129
3-6 中性ベクトル場……134
3-7 自発的対称性の破れ……142
演習問題 3. ……154

4. 摂動論　156〜204

4-1 Dyson の S 行列……156
4-2 Feynman 図……165
4-3 Feynman 規則……176
4-4 最低次の摂動計算例……184
4-5 簡単な Feynman 積分……190
4-6 赤外発散……195
演習問題 4.……204

5. Feynman 積分の一般論　205〜246

5-1 Feynman パラメーター公式……205
5-2 位相公式……213
5-3 Feynman 積分の解析性……229
5-4 しきい値……238
演習問題 5.……245

6. くりこみ理論　247〜296

6-1 紫外発散……247
6-2 くりこみ理論の概要……254
6-3 発散積分の有限化……268
6-4 くりこまれた Feynman 積分の収束の証明……275
6-5 Heisenberg 表示での考察……288
6-6 くりこみ理論による高次補正……292
演習問題 6.……296

付　録　297〜302

A. Lagrange 形式の一般論……297

文献解説　303〜311

演習問題解答　312〜321

索　引　322〜329

1. 予備知識

1-1 解析関数

素粒子論では解析関数の性質をよく用いる．解析関数については既知と思うが，用語や記号を明確にしておくため簡単に復習しておく．また超関数についても少しふれる．

1-1 a　複素数　任意の複素数 z は，x, y を実数とするとき $z=x+iy$ のように書き表わすことができる．ここに $i=\sqrt{-1}$ は虚数単位である．z の実部 x を $\mathrm{Re}\,z$, z の虚部 y を $\mathrm{Im}\,z$ で表わす．また $z^*=x-iy$ は z の複素共役*，$|z|=\sqrt{zz^*}=\sqrt{x^2+y^2}$ は z の絶対値である．$z=x+iy$ のとき，(x, y) を平面上の直交座標とみると z は平面上の点で表わせる．この平面を複素平面という．(x, y) の極座標を (r, θ) とすると，もちろん

$$|z|=r, \qquad z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=re^{i\theta} \tag{1}$$

である．とくに $|e^{i\theta}|=1$.

1-1 b　領域　z がいろいろの複素数値をとるとき，♦複素変数** という．複素変数のとる値として通常複素平面上の連結した範囲を考えて，これを ♦領域という．すなわち，領域とは複素平面上の面分のことである．もちろん領域は，有限のところに局限された，すなわち有界な領域だけとは限らず，複素平面全体のような無限に広がった領域でもよい．しかし無限に広がったものを直接扱うのは不便だから，z の複素平面の各点を1つの球面上の各点に一対一に対応させて z を球面上の点でもって表わし，無限に広がった領域をも有限のものと同じようにみなすことがある．対応の

* 数学では複素共役を表わすのにバーを用いて $\bar{z}$ のように表わすが，物理では z^* のように書く．

** ♦印は索引で検索できる術語を示す．

させ方は，たとえば球の南極を z 平面の原点と一致させるように平面の上に置き，z 平面上の任意の点 z を，その点と球の北極とを結ぶ直線と球面との交点に対応させることにすればよい．このとき球の北極だけは対応する平面上の点がないが，仮想的にその対応点を考えてそれを ♦無限遠点と呼び，$z=\infty$ で表わす．解析関数論ではしばしば $z=\infty$ をあたかも1つの点であるかのように扱う．実際 $z=1/\zeta$ と変換すれば，$z=\infty$ は $\zeta=0$ にほかならない．

領域 D がその境界（D が有界でないときは上述のように球面に移って境界を考える）と全く共通部分をもたないとき D を ♦開領域，境界が完全に D に含まれるとき D を ♦閉領域という．解析関数を論ずるときに使う領域は，とくに断らない限り開領域である．点 z を含む十分小さな開領域を z の ♦近傍という．どれくらい小さければ十分に小さいといえるかは，考える問題による．

1-1 c 複素関数 複素変数 z が D 内でいろいろな値をとるときに，w がそれぞれ決まった複素数値をとるとき，$w=f(z)$ のように書き表わし，w または $f(z)$ を D 上で定義された ♦複素関数という．物理では $f(z)$ が各点各点でてんで勝手な値をとるようなタチの悪い関数は考えない．z 平面上の点 z_0 が w 平面上の点 w_0 に対応するときに，z_0 の近傍の点は w_0 の近傍の点に写されるならば，$w=f(z)$ は $z=z_0$ で ♦連続であるという．すなわち $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ が存在すれば $z=z_0$ で連続である（それが $f(z_0)$ と一致しないときはいつでも $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ を $f(z)$ の $z=z_0$ における値と定義し直すものと約束する）．実変数の関数の場合と違って，これは無限に多くの近づき方に対して要求していることに注意しなければならない．D 内の各点で連続ならば D で連続であるという．

1-1 d 正則関数 $f(z)$ の微分可能性も同様に定義される．すなわち

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \tag{2}$$

が存在すれば，$f(z)$ は $z=z_0$ で ♦微分可能であるという．微分可能ならばもちろん連続だが，逆は一般には成立しない．微分可能性も実変数のときと違って z_0 への無限に異なった仕方での近づき方のすべてに対し，(2) がつねに同じ極限値をもつことを要求しているのだから，極めて強い条件である．このことのために，あとで述べるように，$f(z)$ が $z=z_0$ で微分可能ならば必ず z_0 の近傍で $z-z_0$ についてベキ級数に展開が可能である．

それゆえ，$f(z)$ が $z=z_0$ で微分可能ならば，$f(z)$ は $z=z_0$ で ♦解析的または ♦正則であるという．$f(z)$ が D の各点で正則ならば，それは D で正則であるという．ある1点で正則なことと，その点の近傍で正則なこととは同義である．D で正則な関数 $f(z)$ に対し，各点 $z=z_0$ でその値が(2)に一致する関数を $f(z)$ の ♦導関数と呼び，$f'(z)$ または df/dz で表わすことは実関数のときと同様である(高階導関数も同様)．微分法則もすべて同じように成立する．

1-1 e　複素関数の積分　$f(z)$ を D で連続な関数とし，Γ を D 内の(直観的な意味で曲線と呼べるような)向きの定められた曲線とする．そのとき実関数の積分の定義をすなおに拡張することにより，♦複素積分

$$\int_\Gamma f(z)dz \tag{3}$$

が定義される．Γをこの積分の ♦積分路という．実変数の積分のときは，積分区間は両端点を指定すれば自動的に決まってしまうが，(3)は両端点だけでなく一般に積分路Γの形にも依存しうるわけである．ところが $f(z)$ がDで正則であると(3)がΓに依存しなくなるというのが，次の ♦Cauchy(コーシー)の定理である*．

［Cauchy の定理］ $f(z)$ が D で正則で，C は D 内の単一閉曲線とする．C で囲まれる面分が D に完全に含まれるならば，

$$\int_C f(z)dz=0 \tag{4}$$

である．

すなわち積分路は正則な領域内でつねに連続的変形が可能である．ただし端点のある積分路のときはもちろん端点を動かしてはならない．Cauchy の定理は非常に強力な定理であり，素粒子論でも極めて有効に用いられている．

C で囲まれる部分に被積分関数が正則でない点があれば，(4)は一般に成立しない．上の $f(z)$ の代りに $f(z)/(z-a)$ を考えれば，これは D 内で $z=a$ のみで正則でない(ただし $f(a)=0$ ならば正則)．このとき(4)と(1)を用いて

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-a}dz \tag{5}$$

* Cは両端点の共通な2つの積分路 Γ_1, Γ_2 をつなぎ合わせたものと思えばよい(交点があれば分割して考える)．

が成立することはすぐ証明できる(演習問題1.1参照). ただし, ここでCの向きは正の向きすなわち時計の針と反対まわりとする. (5)を ♦Cauchyの積分表示という. Cの内側における値がC上の値だけで表わせるというところが重要である. aを補助変数とみてaに関してn回微分すると,

$$f^{(n)}(a)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta \tag{6}$$

が得られる. Cはaを囲みさえすればどんなに小さくてもかまわないのだから, 結局(6)は $f(z)$ が $z=a$ で微分可能ならば何回でも微分可能なことを示す. ゆえに $f(z)$ のすべての導関数は $f(z)$ が正則な領域で正則である. またCが $z=a$ を中心とする半径rの円の場合, $|f(z)|$ のC上での最大値をMとすれば, (6)から

$$|f^{(n)}(a)|\leqq n!\,M/r^n \tag{7}$$

が得られる. (6)と, 関数 $(z-\zeta)^{-1}$ を $z-a$ のベキ級数に展開した式と, さらに(5)を使えば

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}f^{(n)}(a)(z-a)^n/n! \tag{8}$$

が導かれる. そしてその収束性も(7)を使って証明できる. このように正則な関数はつねに ♦ベキ級数に展開が可能である. (8)から $f(z)\equiv 0$ でない限り正則関数 $f(z)$ のゼロ点は孤立していることがわかる. なぜなら, $f(a)=0$ ならば, $z=a$ の十分近くでは近似的に $\mathrm{const}\,(z-a)^m$ $(m\geqq 1)$ のように書けるから, $f(z)=0$ を満たす点は $z=a$ 以外にない.

1-1 f　解析接続

[一致の定理] $f(z)$ と $g(z)$ がDで正則で, D内のある曲線上で一致したとする. そのときD全体で $f(z)\equiv g(z)$, すなわち同一の関数である.

なぜならば, $f(z)-g(z)$ はDで正則で, その曲線上でずっと0すなわちゼロ点が孤立していないので, 恒等的に0でなくてはならないからである. この定理を ♦一致の定理という. この定理により $f(z)$ がたとえば実軸上 ($\mathrm{Im}\,z=0$ のところ) のある区間Iでわかっていれば, $f(z)$ が正則である限りIを含む任意の領域Dでの $f(z)$ は一意的に決まってしまう. 一般に, ある局所で $f(z)$ が与えられれば, それが正則である限りどんな遠方でもきちんと決まってしまうわけで, この性質は応用上極めて有用である.

2つの関数 $f(z)$, $g(z)$ がそれぞれ D_1, D_2 で正則, そして共通部分

$D_1 \cap D_2$ が連結でそこで $f(z) \equiv g(z)$ ならば，D_2 の残りの部分でも $f(z) \equiv g(z)$ と定義することにより合併領域 $D_1 \cup D_2$ で正則な関数 $f(z)$ が得られる．これをもとの D_1 での関数 $f(z)$ の ♦解析接続という．この操作をくり返すと，$f(z)$ はつぎつぎに広い領域に解析接続されるが，もしも $D_1 \cap D_2$ が連結でない場合，すなわち互いにつながっていない2つ以上の連結成分から成っている場合は，そのどの連結成分を通って解析接続するかによって同じ z の値に対しても必ずしも同一の関数値が得られるとは限らない．これらの値が一致しないとき，$f(z)$ は $D_1 \cup D_2$ で ♦多価であるというが，このことはもともとの関数概念と矛盾する．そこで z 平面の方を何枚か(多くとも可算無限個)用意してそれをうまく切り継ぎし，その上での領域を考えればいくら解析接続しても $f(z)$ の値が一意的に決まるようにする．このおのおのの z 平面を ♦シートといい，何枚ものシートを切り継ぎしたものの全体を ♦Riemann(リーマン)面という．たとえば，$z^{1/2}$ という関数は $z=0$ と $z=\infty$ を除いたすべての点で正則だが，実正値から実負値へ解析接続するとき，上半面を通るか下半面を通るかによって2つの異なる値をとる．そこで2枚のシートを用意し，実負値のところを切断して第1シートの上半面，下半面をそれぞれ第2シートの下半面，上半面とつなぎ合わせると，$z^{1/2}$ の Riemann 面が得られる．もちろん切り継ぎは負実軸に限らず0と∞とを結ぶどんな曲線を使っても等価な Riemann 面が得られる．

このようにして，必要ならば Riemann 面を導入し，解析接続しうる限り接続して得られる関数の全容を ♦解析関数という．解析関数の間に，ある恒等的関係式が成立していることが，ある小さな領域でわかっていると，解析接続の一意性によりそれは Riemann 面上のいかなる点においても成立することになる．これを ♦関数関係の不変性という．ただしこの不変性は等式に限るので，不等式，近似式，漸近式については何もいえないことに注意しなければならない．たとえば関数の級数の各項の漸近形から，その総和で定義される解析関数の漸近形は決められない*.

1-1 g　特異点　どうしても解析接続しえない点のことを ♦特異点という．特異点が単一閉曲線の上に稠密に並んでいて，それを越えては解析接続できないという場合がありうる．こういうのを ♦自然境界という．しか

* しかしながら，この基本的な事実が最近の素粒子論の高エネルギー漸近的振る舞いの研究においてしばしば無視されている．

し物理では，自然境界のあるような奇妙な解析関数はめったにでてこない．実用上孤立した特異点，すなわちその近傍に他の特異点がないような特異点だけを考えれば十分である．孤立特異点 $z=a$ の近傍で $f(z)$ が一価のときは，$f(z)$ はつねに $z=a$ の近傍で ♦Laurent(ローラン)級数

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n \qquad (z\neq a) \tag{9}$$

に展開できる．$z=a$ は特異点なのだから $n<0$ の係数 c_n の少なくとも1つは0でないものがあるはずである．$c_n\neq 0$ $(n<0)$ なる c_n が有限個のとき特異点 $z=a$ を ♦極，無限個のとき ♦真性特異点と呼ぶ．たとえば，$e^{1/z}$ は $z=0$ で真性特異点をもつ．極の方は，$c_n\neq 0$ なる $-n$ の最大値が m のとき m 位の極という．とくに $m=1$ のときを ♦単純極，それ以外を ♦多重極という．なお(4)，(6)を用いれば

$$c_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz \tag{10}$$

がいえるので，c_{-1} のことを $z=a$ における $f(z)$ の ♦留数と呼ぶ．物理ではしばしば c_n $(n<-1)$ を多重極の留数と呼ぶことがある．

その近傍で多価である場合の特異点を ♦分岐点という．分岐点には，有限回そのまわりをまわって元に戻る場合と，何回まわっても元に戻らない場合とがある．m 回まわって元に戻るときは，$\zeta=(z-a)^{1/m}$ という変数を使うと ζ につき Laurent 級数に展開できる．このとき $n<0$ の項がないか，あるいはあっても有限個ならば，その分岐点は ♦代数的特異点と呼ばれる．何回まわっても元に戻らない分岐点の例は $\log(z-a)$ の $z=a$ である．素粒子論でよく現われる特異点は，極と平方根型および対数関数型の分岐点である．

1-1 h　カット　分岐点をたくさんもっている解析関数の Riemann 面は極めて複雑になる．しかし幸い物理では解析関数を道具として利用するのだから，その全容を知る必要のないことが多い．それゆえ，しばしば Riemann 面の特定の1枚のシートの上だけについて解析性を考察する．このように1枚のシートに話を限ってしまうと，もとの Riemann 面で次のシートに移る継ぎ目のところではもはや正則でなくなってしまう．このような継ぎ目のところを ♦分岐切断線または簡単に ♦カットと呼ぶ．カットは2つの分岐点を結ぶ曲線だが，これは人為的に導入したものだから，前述の自然境界とは全く異なり，シートのとり方を変えることによりその

位置を自由にずらせうる．しかしながら，重要なことは，数学的には全く勝手な存在であるカットが，素粒子論では物理的な意味をもつということである．つまり，カットの位置が物理的な要請から決まってくる場合が多い．

応用上しばしばでてくる場合として，カットがすべて実軸上にある場合が重要である．もし実軸上でカットにおおわれてしまわない線分 I が存在し，$f(z)$ がそこで実だとすると，解析接続の一意性からすぐわかるように，次の関係式が成りたつ：

$$f(z)=[f(z^*)]^* \tag{11}$$

これを ♦Schwarz(シュワルツ)の鏡像原理という．この原理により上半面の $f(z)$ と下半面の $f(z)$ はちょうど複素共役の関係になっているわけである．

z 平面上実軸外からの $\mathrm{Im}\, z\to 0$ の極限を考えよう．もし $\mathrm{Im}\, z\to 0$ のとき $\lim f(z)$ が存在してそれが実ならば，(11) により上からの極限と下からの極限が一致することになるから，そこではカットはいらないはずである．すなわち，カットは $\mathrm{Im}\lim_{\varepsilon\to+0} f(x+i\varepsilon)\neq 0$ なる x に限り存在する．このとき

$$\begin{aligned}\operatorname*{disc}_{z=x} f(z) &\equiv \lim_{\varepsilon\to+0} f(x+i\varepsilon)-\lim_{\varepsilon\to+0} f(x-i\varepsilon)\\ &=\lim_{\varepsilon\to+0}\{f(x+i\varepsilon)-[f(x+i\varepsilon)]^*\}\\ &=2i\,\mathrm{Im}\lim_{\varepsilon\to+0} f(x+i\varepsilon)\end{aligned} \tag{12}$$

のことを $f(z)$ の ♦discontinuity と呼ぶ(もちろんこの概念は任意のカットに対しても定義される)．$f(z)$ はカットをよぎるとき $\operatorname*{disc}_{z=x} f(z)$ だけジャンプするわけである．

1-1 i 超関数 上述では $\lim_{\varepsilon\to+0} f(x\pm i\varepsilon)$ が実変数の関数として存在するような場合を考えたけれども，特異点のところでは一般に必ずしもそれは存在しない．たとえば $1/z$ は $z=0$ で極をもつので $\lim_{\varepsilon\to+0} 1/(x\pm i\varepsilon)$ は $x=0$ で関数としては意味がない．しかし，$\varepsilon\to+0$ の極限を他の計算のあとからとることにすれば，こういったものは普通のタチのよい関数と同じように自由に微分積分演算をほどこすことが可能である．そこで，実変数の関数の概念を拡張して，解析関数の ♦境界値 $\lim_{\varepsilon\to+0} f(x\pm i\varepsilon)$ やその一次結合で表わされるようなものを ♦超関数と呼ぶことにする*(脚注は次頁)．

たとえば，重要な超関数として

$$\delta(x)\equiv\frac{1}{2\pi i}\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{1}{x-i\varepsilon}-\frac{1}{x+i\varepsilon}\right)=\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} \tag{13}$$

$$\mathrm{P}\frac{1}{x}\equiv\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{1}{x-i\varepsilon}+\frac{1}{x+i\varepsilon}\right)=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{x}{x^2+\varepsilon^2} \tag{14}$$

がある．$\delta(x)$ はよく知られた *Dirac（ディラック）のデルタ関数，$\mathrm{P}\,1/x$ は *Cauchy の主値であり，$x\neq0$ ではそれぞれ 0, $1/x$ に一致する．$\varphi(x)$ がタチのよい関数ならば，$a<0<b$ とするとき

$$\int_a^b\delta(x)\varphi(x)dx=\varphi(0) \tag{15}$$

$$\mathrm{P}\int_a^b\frac{1}{x}\varphi(x)dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int_a^{-\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx+\int_\varepsilon^b\frac{\varphi(x)}{x}dx\right] \tag{16}$$

である．(15) から直ちに

$$\delta(cx)=|c|^{-1}\delta(x)\qquad(c\neq0\text{: 実数}) \tag{17}$$

$$x\delta(x)=0 \tag{18}$$

であることがわかる．また逆に $xf(x)=0$ ならば $f(x)=c\delta(x)$ となる．(16) からもちろん

$$x\mathrm{P}\,1/x=1 \tag{19}$$

である．

(13) と (14) を逆に解くと，

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{x\pm i\varepsilon}=\mathrm{P}\frac{1}{x}\mp i\pi\delta(x) \tag{20}$$

を得る．(20) の両辺を $m-1$ 回微分すると，

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{(x\pm i\varepsilon)^m}=\mathrm{Pf}\frac{1}{x^m}\mp i\pi\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\delta^{(m-1)}(x) \tag{21}$$

となる．$\delta^{(n)}(x)=(-1)^n\delta^{(n)}(-x)$ は $\delta(x)$ の n 階導関数で，$\delta^{(1)}(x)$ や $\delta^{(2)}(x)$ はもちろん $\delta'(x)$ や $\delta''(x)$ のように書く．また部分積分してわかるように

$$\int_a^b\delta^{(n)}(x)\varphi(x)dx=(-1)^n\varphi^{(n)}(0) \tag{22}$$

である．記号 Pf は Cauchy の主値の拡張で (21) の実部として定義されるようなものである．$\mathrm{Pf}\,1/x^m\neq(\mathrm{P}\,1/x)^m$ $(m\geqq2)$ であることに注意を要する．(18), (19) を x について微分すると，

---

* この定義による超関数は，*佐藤の超関数 (hyperfunction) と呼ばれているもので，よりポピュラーな *Schwartz（シュヴァルツ）の超関数 (distribution) の拡張になっている．

$$x\delta'(x) = -\delta(x) \tag{23}$$

$$x^k \,\mathrm{Pf}\, 1/x^m = \mathrm{Pf}\, 1/x^{m-k} \qquad (k\text{: 正の整数}) \tag{24}$$

などの公式が得られる．

2つの超関数の積は，両者の特異点の位置が全く一致していなければ定義できるが，1つでも一致しているときは一般には定義できない．たとえば $[\delta(x)]^2$ や $[\mathrm{P}\,1/x]^2$ は意味がない．しかし (21) に見られるように $\lim_{\epsilon\to+0}[1/(x\pm i\epsilon)]^2$ やその虚部を比較して得られる式

$$\delta(x)\mathrm{P}\frac{1}{x} = -\frac{1}{2}\delta'(x) \tag{25}$$

などのように意味をもつ場合も存在する．(25)はとくに有用である．ただし積の定義ができる場合でも，結合則は一般に満足しないことに注意を要する．たとえば，x と $\delta(x)$ と $\mathrm{P}\,1/x$ の積は，結合の順序により3通りの答 0, $\frac{1}{2}\delta(x)$, $\delta(x)$ が得られる．

1-1 j　Hilbert 変換　$f(z)$ が上半面で正則であると，上半面内の単一閉曲線 C に対し Cauchy の積分表示 (5) が成立するが，もし $z\to\infty$ で $|f(z)|$ が $|z|$ の無限小負ベキ程度以上に速く 0 になれば，C を上半面でできるだけ大きくとった極限で，(5) の右辺は実軸上の積分だけになって

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\lim_{\epsilon\to+0} f(x+i\epsilon)}{x-a}dx \tag{26}$$

と書ける．さらに $a=u+i\epsilon$ とおき $\epsilon\to+0$ として (20) を用いると，(26) の実部から

$$\mathrm{Re}\lim_{\epsilon\to+0} f(u+i\epsilon) = \frac{1}{\pi}\mathrm{P}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{Im}\lim_{\epsilon\to+0} f(x+i\epsilon)}{x-u}dx \tag{27}$$

という関係式が得られる．この関係式は *Hilbert（ヒルベルト）変換と呼ばれる．

とくに $f(z)$ が実軸上の線分 I で実である場合は，(11) によって下半面でも正則になるから，カットをよけて全平面をまわるように積分路をとれば，(12) によって

$$f(z) = \frac{1}{\pi}\int\frac{\mathrm{Im}\lim_{\epsilon\to+0} f(x+i\epsilon)}{x-z}dx \tag{28}$$

が得られる．積分区間は $\operatorname*{disc}_{z=x} f(z)\neq 0$ のところだけをとればよい．(28) を $f(z)$ の *スペクトル表示と呼ぶ．(27) あるいは (28) は応用上極めて重要である．

1-1 k 多変数解析関数 以上ではすべて1変数の関数の場合に限って述べたが，多変数の場合もたんに1変数のくり返しとして考えてよいような種類の問題では全く同様に扱える．しかし，領域や特異点の性状については，多変数解析関数の場合質的に違った事情が現われる．また実数値への境界値もたんに上からと下からとだけではなく，いろいろな方向からの境界値を区別して考えなければならないわけである．しかし，本書では1変数解析関数論から十分理解できる程度以上のことは使わない．

1-2 ベクトル空間

ベクトル空間の概念は，素粒子論のいたるところでいろいろな形で現われてくる．そしてベクトルに作用する演算子は行列の形で表現される．本節ではこれらの基本的な事柄をまとめておこう．

1-2 a ベクトル空間の定義 ベクトルは必要に応じていろいろな記号で書かれるが，本節では $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ などでベクトルを表わすことにする．実数全体の集合を $\boldsymbol{R}$，複素数全体の集合を $\boldsymbol{C}$ と書く．$\boldsymbol{R}$ でも $\boldsymbol{C}$ でもよいときは，代りに K と書くことにしよう．♦ベクトル空間 $\mathfrak{V}$ とは次の条件を満たすような集合で，その要素のことを ♦ベクトルという．

1. $\mathfrak{V}$ 内で加法減法が自由にできる．記号で書けば，$\boldsymbol{x}\in\mathfrak{V}$, $\boldsymbol{y}\in\mathfrak{V}$ ならば $\boldsymbol{x}\pm\boldsymbol{y}\in\mathfrak{V}$．とくに $0\in\mathfrak{V}$．
2. 数との掛け算ができる．すなわち，$a\in K$ ならば $\boldsymbol{x}\in\mathfrak{V}$ に対し $a\boldsymbol{x}\in\mathfrak{V}$（ただし $1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$）．
3. 加法は結合則，交換則を満足する．
4. K の数との乗法は，結合則と（2種類の）分配則を満足する．

K が $\boldsymbol{R}$ のとき $\mathfrak{V}$ を ♦実ベクトル空間，K が $\boldsymbol{C}$ のとき ♦複素ベクトル空間という．

いくつかのベクトル $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ があって，$a_j\in K\,(j=1, \cdots, n)$ に対し

$$a_1\boldsymbol{x}_1+\cdots+a_n\boldsymbol{x}_n=0 \tag{1}$$

が $a_1=\cdots=a_n=0$ のとき以外に成立しないとき，$\{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n\}$ は ♦一次独立であるという．$\mathfrak{V}$ の中に一次独立なベクトルが有限個しかとれないとき $\mathfrak{V}$ を ♦有限次元ベクトル空間，そうでないときを ♦無限次元ベクトル空間という．有限次元のとき $\mathfrak{V}$ の中の一次独立なベクトルの最大個数 n を $\mathfrak{V}$ の ♦次元という．以下しばらく有限次元の場合を考える．

$\mathfrak{V}$ が n 次元ならば，一次独立な n 個のベクトルの組 $\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ が存在する．これを ♦基底という．任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は

$$\boldsymbol{x}=\sum_{j=1}^{n} x_j \boldsymbol{e}_j \qquad (x_j \in K) \tag{2}$$

のように一意的に表わせる．すなわち，$\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ を固定すれば $\boldsymbol{x}$ は n 個の数の順列 $(x_1, \cdots, x_n)$ と同等である．x_j を $\boldsymbol{x}$ の $\boldsymbol{e}_j$ 成分という．

1-2 b 内積 ベクトルの ♦内積あるいは ♦スカラー積を，普通数学で使うより少し広い意味で次のように定義する．$\mathfrak{V}$ の2つのベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ の内積 $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ は，K の数であって次の性質をもつ*.

$$(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})^*=(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \tag{3}$$

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{y}, a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{x}')&=a(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})+b(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}')\\ (a\boldsymbol{y}+b\boldsymbol{y}', \boldsymbol{x})&=a^*(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})+b^*(\boldsymbol{y}', \boldsymbol{x})\end{aligned} \tag{4}$$

もちろん (3) を使えば (4) の一方は他方から導かれる．(3) は $K=\boldsymbol{R}$ のときは $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{R}$ なるゆえ $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})=(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ のことである．$K=\boldsymbol{C}$ のときも (3) から $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ はつねに実数であることがわかる．$\boldsymbol{x}=a\boldsymbol{y}$ の関係があるとき $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ は ♦平行であるといい，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=0$ のとき $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ は ♦直交するという．

さて，任意の2つのベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ の $\boldsymbol{e}_j$ 成分をそれぞれ x_j, y_j とすれば，(4) により

$$(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} y_k^* x_j (\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_j) \tag{5}$$

となる．はじめに $\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ をうまく選んでおくと必ず ♦直交条件

$$(\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_j)=\eta_k \delta_{kj} \tag{6}$$

を満たし，かつすべての k につき η_k を $+1$ か -1 か 0 にすることができる．ここに δ_{kj} は ♦Kronecker(クロネッカー)のデルタで，$\delta_{kk}=1$, $j \neq k$ のとき $\delta_{kj}=0$ により定義される．もし $\eta_k=0$ なるものが1つでもあれば，ベクトル空間 $\mathfrak{V}$ は ♦縮退(degenerate)しているという．$\boldsymbol{e}_k$ は $\mathfrak{V}$ のすべてのベクトルと直交するから内積に全くきかないので，$\boldsymbol{e}_k$ を省いても次元が減るだけで内積は不変である．それゆえ，このような無効な次元ははじめから無視することにし，今後 $\mathfrak{V}$ は縮退していないものと約束する**．そうすると，

$$\eta_k=+1 \quad \text{または} \quad -1 \tag{7}$$

* (4) で複素共役のとり方が数学の慣習と逆になっていることに注意.

** ただし部分空間については縮退している場合を排除できない.

である．基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ が (6), (7) を満たすとき，♦規格化直交系をなすという．(6) を (5) に代入すれば

$$(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})=\sum_{k=1}^{n}\eta_k y_k{}^* x_k \tag{8}$$

を得る．(7) で $\eta_k=-1$ となる $\boldsymbol{e}_k$ が少なくとも 1 つあるとき，$\mathfrak{V}$ を ♦不定計量 (indefinite metric) のベクトル空間という．すべての k につき $\eta_k=1$ のとき ♦正定値(positive definite)のベクトル空間といい，このときは (8) から任意の $\boldsymbol{x}\in\mathfrak{V}$ に対し

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})=\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2\geqq 0 \tag{9}$$

となり，等号が成立するのは $\boldsymbol{x}=0$ のときに限る．数学ではこの性質をもつもののみを内積と呼ぶのが普通である．しかし，以下ではとくに正定値の場合に限定しないで話をすすめることにする．

1-2 c　線形演算子　任意の $\boldsymbol{x}\in\mathfrak{V}$ に対し，$\tau\boldsymbol{x}\in\mathfrak{V}$ となるような τ を $\mathfrak{V}$ 上の ♦演算子という．とくに τ が

$$\tau(a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{x}')=a\tau\boldsymbol{x}+b\tau\boldsymbol{x}' \tag{10}$$

という性質をもっているとき，τ を ♦線形演算子という．以下演算子といえば線形演算子を指すものとする．

$\tau\boldsymbol{e}_j\in\mathfrak{V}$ なのだから (2) によって

$$\tau\boldsymbol{e}_j=\sum_{k=1}^{n}t_{kj}\boldsymbol{e}_k \qquad (t_{kj}\in K) \tag{11}$$

と書けるはずである．すなわち 1 つの演算子 τ には 1 つの正方行列 $T=(t_{kj})$ が対応する．そして $T=0$ は $\tau=0$ (すべてのベクトルを 0 にもっていくような演算子) のときに限る．σ に対応する行列を $S=(s_{kj})$ とすると，(10) により

$$\begin{aligned}(\sigma\tau)\boldsymbol{e}_j&\equiv\sigma(\tau\boldsymbol{e}_j)\\&=\sigma\sum_{k=1}^{n}t_{kj}\boldsymbol{e}_k\\&=\sum_{k=1}^{n}t_{kj}\sum_{l=1}^{n}s_{lk}\boldsymbol{e}_l=\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}s_{lk}t_{kj}\right)\boldsymbol{e}_l\end{aligned} \tag{12}$$

であるから，演算子の積 $\sigma\tau$ は行列の積 ST に対応する．このように演算子は行列と同一視できる．しかし，このことはあくまで基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ を固定したうえでの話で，基底を変えれば行列の表式は変わってくる．T を τ の ♦行列表現と呼ぶ．

正方行列 T から作られる行列式を $\det T$ と書く．T が逆行列 T^{-1} をもつとき ♦非特異 (non-singular) というが，有限次元では T が非特異なことと $\det T \neq 0$ とは同等である．基底の変換は 1 つの行列 U で表わせるが，逆変換が存在するから U は非特異である．U で表わされる基底の変換に対し，τ の行列表現 T は，$U^{-1}TU$ のように変換されることは容易にわかる．

1-2 d　Hermite 性と unitary 性　すべての $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathfrak{V}$ に対し

$$(\tau^\dagger \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{y}, \tau \boldsymbol{x}) \tag{13}$$

となる演算子 $\tau^\dagger$ を τ の ♦Hermite (エルミート) 共役と呼ぶ．有限次元ベクトル空間では任意の τ に対し必ず $\tau^\dagger$ が存在することは，次のようにして証明できる．

τ は線形だから規格化直交系の基底に関して考えれば十分である．(11) から*

$$(\boldsymbol{e}_k, \tau \boldsymbol{e}_j) = \eta_k t_{kj} \tag{14}$$

だから，(3) と (13) により

$$(\boldsymbol{e}_k, \tau^\dagger \boldsymbol{e}_j) = (\tau^\dagger \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_k)^* = \eta_j t_{jk}{}^* \tag{15}$$

となる．したがって，行列表現 $(\eta_j t_{jk}{}^* \eta_k)$ をもつ演算子を $\tau^\dagger$ と定義すればよい．(証明終)　行列 T の Hermite 共役を $T^\dagger$, $(\eta_j \delta_{jk})$ なる対角行列を η で表わすと，$\tau^\dagger$ の行列表示は $\eta T^\dagger \eta$ と書ける．

積の Hermite 共役については，

$$(\sigma\tau)^\dagger = \tau^\dagger \sigma^\dagger \tag{16}$$

という関係が成りたつことは (13) からすぐ知られる．

$\sigma^\dagger = \sigma$ であるような演算子 σ を ♦Hermite 的，$\tau^\dagger = \tau^{-1}$ であるような非特異演算子 τ を ♦unitary 的と名づけることにする**．とくに正定値の複素ベクトル空間では，σ, τ はそれぞれ Hermite, unitary と呼ばれる演算子にほかならない．σ, τ の行列表現は，$\mathfrak{V}$ が正定値の実ベクトル空間のとき，それぞれ ♦対称行列，♦直交行列であり，正定値の複素ベクトル空間のときは，それぞれ ♦Hermite 行列，unitary 行列になる．$\mathfrak{V}$ が不定計量のときはそうはならないので，すべてに擬の字をつけていう．たとえば，♦擬 Hermite 行列，♦擬 unitary 行列のようにいう．

---

* (14) の左辺は量子論でいう τ の“行列要素”にあたるものである．それは不定計量の空間では τ の行列表現の要素 t_{kj} と必ずしも一致しないことに注意せよ．

** これは本書だけの造語である．

τ が unitary 的であるならば $\tau^\dagger\tau=1$ だから，任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathfrak{V}$ に対し

$$(\tau \boldsymbol{y}, \tau \boldsymbol{x})=(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \tag{17}$$

である．逆に (17) が成立すれば，有限次元ベクトル空間では τ が unitary 的であるということはすぐ証明できる*.

［定理］ $\mathfrak{V}$ が複素ベクトル空間で，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathfrak{V}$ に対しつねに

$$(\boldsymbol{x}, \sigma \boldsymbol{x})=0 \tag{18}$$

ならば $\sigma=0$ である．$\mathfrak{V}$ が実ベクトル空間のときは，さらに σ が Hermite 的であるならば $\sigma=0$ である**.

証明は，任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathfrak{V}$ に対し $(\boldsymbol{y}, \sigma \boldsymbol{x})=0$ なることを示せばよい．$\mathfrak{V}$ が複素ベクトル空間のときは，恒等式***

$$\begin{aligned}4(\boldsymbol{y}, \sigma\boldsymbol{x})=&(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \sigma(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}))-(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}, \sigma(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}))\\&+i(\boldsymbol{x}+i\boldsymbol{y}, \sigma(\boldsymbol{x}+i\boldsymbol{y}))-i(\boldsymbol{x}-i\boldsymbol{y}, \sigma(\boldsymbol{x}-i\boldsymbol{y}))\end{aligned} \tag{19}$$

が成立することから直ちに従う．$\mathfrak{V}$ が実ベクトル空間で σ が Hermite 的ならば，

$$4(\boldsymbol{y}, \sigma\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \sigma(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}))-(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}, \sigma(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})) \tag{20}$$

からわかる．(証明終) この定理は $\mathfrak{V}$ が無限次元でも成立する．

上の定理でとくに $\sigma=\tau^\dagger\tau-1$ とおけば，次の重要な結果が得られる．

［定理］ τ が unitary 的であるための必要十分条件は，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathfrak{V}$ に対し

$$(\tau \boldsymbol{x}, \tau \boldsymbol{x})=(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \tag{21}$$

であることである．

1-2 e　Lie 群　(21) はベクトルの成分を用いて書くと，unitary 的演算子 τ の行列表現は

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})=\sum_{k=1}^{n} \eta_k x_k^* x_k \tag{22}$$

を不変にするような変換であることがわかる．(22) を不変にする行列の全体は明らかに群をなす．ただし群とは，周知のように，結合則を満たす乗法の定義された集合で，1に相当する単位元と，逆数に相当する逆元とが

---

* $\tau^\dagger\tau=1$ は明らかだから τ^{-1} の存在をいえばよいが，τ の行列表示を T とすると $\eta T^\dagger \eta T=1$ により $\det T \neq 0$ である．

** 実ベクトル空間では一般の σ については (18) から $\sigma=0$ が従わない．

反例：$(a \ \ b)\begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=0.$

*** これは polarization と呼ばれている．

存在するようなものである．n 次の unitary 行列の全体を n 次 ♦unitary 群と呼び，$U(n)$ と書く．同様に n 次の直交行列の全体を n 次 ♦直交群と呼び，$O(n)$ と書く．不定計量の場合は，η_k の中の正のものの数を m とすると，たとえば n 次 ♦擬直交群は $O(m, n-m)$ のように書かれる．もちろん $O(n-m, m)$ は $O(m, n-m)$ と同じ群，$O(n, 0)$ は $O(n)$ と同じ群である．

n 次の非特異行列の全体のつくる群を $GL(n, \boldsymbol{C})$ と書くが，一般に $GL(n, \boldsymbol{C})$ の部分群でその中で連続性に関し閉じたものを n 次の ♦Lie (リー)群と呼ぶ．$U(n)$，$O(n)$，$O(m, n-m)$ などは Lie 群の例である．このほかにもいろいろな Lie 群が存在する．たとえば行列式の値が 1 に等しい行列の全体は ♦特殊線形群と呼ばれ，行列要素を実数だけに限るか，一般に複素数まで許すかに応じてそれぞれ $SL(n, \boldsymbol{R})$，$SL(n, \boldsymbol{C})$ のように書く．$SL(n, \boldsymbol{C})$ と $U(n)$ との共通部分を $SU(n)$，$SL(n, \boldsymbol{R})$ と $O(n)$ との共通部分を $SO(n)$ と書き，それぞれ ♦特殊 unitary 群，♦特殊直交群と呼ぶ．後者はまた ♦回転群ともいう．

各 Lie 群で，その行列に含まれる自由な実パラメーターの数 N を，その Lie 群の ♦次元という．たとえば，$O(m, n-m)$，$U(n)$，$SU(n)$，$SL(n, \boldsymbol{C})$ の次元は，それぞれ $n(n-1)/2$，n^2，n^2-1，$2(n^2-1)$ である．

Lie 群の構造は，単位元の近傍だけを調べるとおおよそのところがわかってしまう．すなわち ε_j を無限小の実パラメーターとして単位元の近傍の要素を

$$\exp\sum_{j=1}^{N}\varepsilon_j X_j \tag{23}$$

のように書き表わすと，行列 X_j の相互関係を調べれば Lie 群の大局的構造以外のことはわかってしまうのである．X_j の虚数倍を ♦generator，X_j のつくる代数を ♦Lie 環という．Lie 環は

$$X_jX_k-X_kX_j=\sum_l c^l_{jk}X_l \tag{24}$$

のような X_j 間の相互関係式によって完全に決定される．(24) で c^l_{jk} は K の数で，♦構造常数と呼ばれている．

Lie 群が同じでなくても，Lie 環が一致する場合がある．たとえば，$O(3)$ と $SU(2)$，$O(3, 1)$ と $SL(2, \boldsymbol{C})$ の Lie 環がそれぞれ一致することは，量子論において極めて重大な意義をもつ．

Lie 群と Lie 環の理論は応用上非常に重要であるが，本書ではあまり立

ち入らない．

1-2 f 無限次元ベクトル空間 有限次元の場合はこれくらいにして，次に無限次元ベクトル空間 $\mathfrak{V}$ を考察しよう．こんどは一次独立なベクトルが無限にたくさんあるわけである．一次独立なベクトルに名前をつけるのに，実数全体を使わねばならないほどたくさんあってはとり扱いが厄介なので，通常は一次独立なベクトルの個数は 1, 2, 3, ⋯ と番号のつけられる程度すなわち可算無限個であると仮定する．このことは通常 ♦可分 (separable) と呼ばれる．可分な無限次元ベクトル空間に話を限っても，基底のベクトルは $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots\}$ のように無限にたくさんあるのだから，任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ を基底で表わすときは

$$\boldsymbol{x}=\sum_{j=1}^{\infty}x_j\boldsymbol{e}_j \tag{25}$$

のように無限級数を用いなければならないだろう．そうすると無限級数の和とはどういうことかということを定義しなければならない．つまり(25)の第 n 項までの和を $\boldsymbol{x}_n$ と書くと，(25)は

$$\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{x}_n=\boldsymbol{x} \tag{26}$$

と書けるから，結局 n を大きくすれば $\boldsymbol{x}_n$ が $\boldsymbol{x}$ にいくらでも近づくということの意味を明瞭にすればよい．このように，空間内の 2 つの点(今の場合それをベクトルと呼んでいるわけだが)が十分近いかどうかというような概念を一般に空間の ♦位相 (topology) と呼ぶ．位相空間すなわち位相の定義された空間の代表的な例は ♦ノルム空間である．$\mathfrak{V}$ がノルム空間であるとは，任意の $\boldsymbol{x}\in\mathfrak{V}$ に対し次の性質をもつ ♦ノルム $\|\boldsymbol{x}\|$ が定義されていることである．

1. $\|\boldsymbol{x}\|\geqq 0$
2. $\boldsymbol{x}=0$ なるときに限り $\|\boldsymbol{x}\|=0$
3. $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|\leqq\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|$
4. $\|a\boldsymbol{x}\|=|a|\cdot\|\boldsymbol{x}\| \qquad (a\in K)$

ノルムとは要するにベクトルの長さの概念を抽象したものである．

ノルム空間では，(26)は

$$\lim_{n\to\infty}\|\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{x}\|=0 \tag{27}$$

と定義すればよい．もし十分大きな n, m に対しつねに $\|\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{x}_m\|$ が十分小さいならば，$\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{x}_n$ が $\mathfrak{V}$ 内に存在するという性質をもつとき，$\mathfrak{V}$ は ♦完備(complete)であるという．完備とは，象徴的にいえば空間に“すき

ま”がないということである.

正定値の無限次元ベクトル空間では $\boldsymbol{x}$ のノルムを

$$\|\boldsymbol{x}\| \equiv \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})} \tag{28}$$

で定義することができる. もしこのノルムについて完備ならば, この空間を ♦Hilbert 空間と呼ぶ. たとえば, その絶対値の 2 乗が積分可能な実変数 x の関数 $f(x)$ の全体は,

$$(f, g) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x) g(x) dx \tag{29}$$

を内積として Hilbert 空間をなす. この例ではベクトルというのが 1 つの関数のことで, その直交性は $(f, g)=0$ で定義されるわけである.

不定計量の場合は $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ が正定値でないから, (28) のようにおくわけにはいかない. どのようにノルムを導入すれば最も合理的かは非常に難しい問題であるが, ここではこの問題に深入りしないで何らかの仕方でノルムが定義されているものと仮定する. このような空間を ♦不定計量の Hilbert 空間 (indefinite-metric Hilbert space) という.

内積や演算子や行列表現に関する用語や定義は, 有限次元の場合に準ずる. ただし不定計量の Hilbert 空間に関しては厳密な考察は難しい*. 無限次元の場合, 注意しなければならないのは, $\tau^\dagger\tau=1$ から $\tau\tau^\dagger=1$ が導かれないことである. これは無限行列の行列式というものが一般には意味づけできないからである. それゆえ, τ が unitary 的であるための必要十分条件は, (21) の代りにすべての $\boldsymbol{x} \in \mathfrak{V}$ に対し

$$(\tau\boldsymbol{x}, \tau\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (\tau^\dagger\boldsymbol{x}, \tau^\dagger\boldsymbol{x}) \tag{30}$$

となる. ただし τ^{-1} の存在がわかっていれば (21) だけで τ が unitary 的であるといえる.

1-2 g 群の表現 あとでよく用いる群の表現に関する用語をまとめておこう. ♦群の表現とは, 与えられた群 G を乗法の性質を保つように別の群 Γ に写すことである. Γ が単位元のみから成る場合も, つまらない (trivial) 場合であるけれども, つねに表現になっているので, ♦恒等表現という.

---

* 最近, 不定計量の Hilbert 空間の厳密な考察もかなり行なわれるようになってきた. とくに ♦Krein (クライン) 空間 (あるいは ♦Nevanlinna (ネヴァンリーナ) 空間) と呼ばれる空間は, 直交する 2 つの Hilbert 空間 (そのうち一方は内積の符号を逆にする) の直和に分解するような空間であるが, これについては数学的に詳しく調べられている.

表現群 Γ としては，通常（有限次元または無限次元の）ベクトル空間 $\mathfrak{V}$ の上の演算子のつくる群をとる．この場合の表現をとくに G の ♦線形表現というが，以下本書では群について表現といえば線形表現を意味するものとする．$\mathfrak{V}$ のことを ♦表現空間，$\mathfrak{V}$ の次元を ♦表現の次元と呼ぶ．Γ が Lie 群のときは，表現の次元はその行列の次数であって，Lie 群の次元とは異なる．

$\mathfrak{V}$ の部分空間 $\mathfrak{W}$ の任意のベクトルに Γ のどの演算子を作用させても $\mathfrak{W}$ の外にとび出さないとき，$\mathfrak{W}$ を Γ の ♦不変部分空間という．もし $\mathfrak{V}$ が $\{0\}$ と $\mathfrak{V}$ 自身以外に不変部分空間をもたなければ，表現 Γ は ♦既約 (irreducible) であるという．G が可換群，すなわち交換則を満たす群であれば，既約表現は 1 次元表現しかない．

Γ が unitary 演算子のつくる群であるときは，unitary 表現という．unitary 表現は ♦完全可約，すなわち可約表現は既約表現の直和で表わせる．

1-3 特殊相対論

周知のように，Einstein（アインシュタイン）の相対性理論は，♦特殊相対論と ♦一般相対論から成る．一般相対論は，結局のところ 1 つの重力理論で，重力の現象を完全に空間の幾何学に帰着させた，最もみごとな理論である．数学的構成は極めて美しいが，実際にそれをとり扱うとなると非常に複雑であり，量子論へ拡張することはほとんどお手あげである．しかし，幸いなことに，重力の相互作用は小質量のものに関しては極端に弱いので，素粒子物理学では全く正当な近似で重力の効果を完全に無視しうる．それゆえ，通常素粒子論は特殊相対論の枠内で構成することができると考えられている*.

1-3 a 特殊相対論の基礎 特殊相対論では，すべての重力や加速度の影響をとり除いた極限の系を想定して，それを ♦慣性系と呼び，慣性系から見た現象だけを論ずる．慣性系は空間的に均質かつ等方であると考えられる．1 つの慣性系に対し等速直線運動する系もまた慣性系である．特殊相対論の実験的支柱は，♦光速度不変の原理，すなわち真空中の光の伝播

---

* 1-5 f で述べる場の量子論の発散の困難は，重力の影響を無視したための困難であると考えている人もいる．

速度

$$c=2.9979\times10^{10}\ \mathrm{cm/sec} \qquad (1)$$

はどの慣性系から見ても相等しいことである．特殊相対論の数学的支柱は，♦特殊相対性原理，すなわち物理現象を記述する基本方程式はどの慣性系から見ても同じ形をしていなければならないという♦共変性の要請である．

今後相対論といえば特殊相対論を意味するものとする．

1-3 b Minkowski 空間 われわれが住んでいると考えている3次元の Euclid 空間の3つの直交座標 (x_1, x_2, x_3) と，時間 t の c 倍 $x_0=ct$ の4つを成分とするような4次元実ベクトル (x_0, x_1, x_2, x_3) を考え，2つのベクトル (x_0, x_1, x_2, x_3) と (y_0, y_1, y_2, y_3) の内積が

$$x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3-x_0y_0 \qquad (2)$$

で与えられるものとする*．このようなベクトルではられる空間，すなわち4次元の不定計量の実ベクトル空間を ♦Minkowski（ミンコフスキー）空間と呼ぶ．2次形式(2)を不変にする変換を ♦Lorentz(ローレンツ)変換というが，光速度不変の原理と特殊相対性原理とは，すべての基本方程式が Lorentz 変換をほどこしても形が変わらないということで表現される．

習慣上 Minkowski 空間のベクトルは $\boldsymbol{x}$ のようなベクトル記号を使わず，成分をまとめて書いて x_μ のように表わす．不変式(2)を表わすのに普通次の3種類の記法が用いられている．

[記法 1] $x_4=ix_0$ とおき，$\mu=1, 2, 3, 4$ と考えれば，x_μ を4次元の Euclid ベクトルのように扱える．

[記法 2] x_μ を ♦共変ベクトルと呼び，♦反変ベクトル x^μ を，$x^k=x_k$ $(k=1, 2, 3)$，$x^0=-x_0$ で定義し，x^μ と y_μ の内積として(2)を表わす．

[記法 3] やはり反変ベクトル x^μ を導入するが，記法2とは逆符号にして，$x^0=x_0$，$x^k=-x_k$ $(k=1, 2, 3)$ とする．

不幸にもこの3種類の記法はいずれもしばしば用いられている．記法の異なる文献は，比較する前にいちいち翻訳という無駄な手数をふまねばならないのが現状である．現在では記法3にだんだん統一される傾向にあるので，本書もそれに従う．すなわち

$$x^\mu x_\mu\equiv x_0{}^2-x_1{}^2-x_2{}^2-x_3{}^2 \qquad (3)$$

---

* あとで全体の符号を逆にする．

とする．添字 μ に関する和記号は ♦Einstein の規約に従って省略する．一般に μ, ν, σ などのギリシャ文字は (0, 1, 2, 3) と動く4次元量の添字，j, k, l などのラテン文字は (1, 2, 3) と動く3次元量の添字とする．また3次元のベクトルは太字を用いて表わし，初等ベクトル幾何学の記法をそのまま用いる．(3) の量をしばしば簡単に x^2 と書く．これを x^μ の第2成分と混同しないため，個々の空間成分を書くときは必ず共変成分を用いることにする．

1-3 c　Lorentz 群　上に述べたように，(3) を不変にする変換が Lorentz 変換であるが，その全体を ♦Lorentz 群という．Lorentz 群は擬直交群 $O(3, 1)$ にほかならない．Lorentz 群は4つの連結成分から成る．つまり，Lorentz 変換を行列 $L=(l_\mu{}^\nu)$ で書くと（変換は $x_\mu'=l_\mu{}^\nu x_\nu$ と書ける），$\det L$ が $+1$ であるかまたは -1 であるかということと，$l_0{}^0$ の符号が正であるか負であるかということとで，都合 $2\times2=4$ 通りの場合ができ，これらは互いに連続的には移れない．$\det L=1$ かつ $l_0{}^0>0$ のものは単位行列と連続的につながるものなので，このような L の全体を ♦本義 Lorentz 群と呼ぶことにしよう．相対論では本来は本義 Lorentz 群のみを考察すべきであるが，しばしば ♦空間反転 ($x_0'=x_0$, $\boldsymbol{x}'=-\boldsymbol{x}$) や ♦時間反転 ($x_0'=-x_0$, $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{x}$) をも含めた Lorentz 群全体を対象とする．

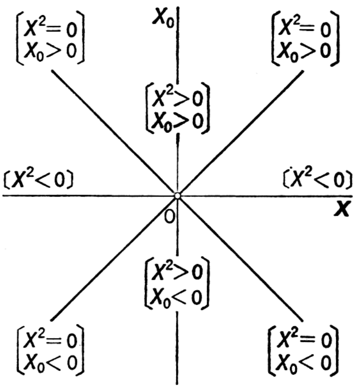
1-3 d　テンソル　Lorentz 変換の下で不変な量を ♦スカラー，x_μ と同じように変換する4成分の量を一般に ♦ベクトルと呼ぶ．さらに16成分から成る量 $a_{\mu\nu}$ が Lorentz 変換の下で2つのベクトルの積 $x_\mu y_\nu$ と同じように変換するとき，$a_{\mu\nu}$ を ♦2階テンソルという．3階以上のテンソルも同様に定義される．

2階テンソルで常数のテンソルがただ1つ存在する．それを $g_{\mu\nu}$ と書き，♦計量テンソルと呼ぶ．これは $g_{00}=-g_{kk}=1$, $\mu\neq\nu$ のとき $g_{\mu\nu}=0$ によって定義される．$g_{\mu\nu}$ はまた $g^{\mu\nu}$ と書くこともでき，これらを使って添字の上げ下げができる．たとえば，$g^{\mu\nu}x_\nu=x^\mu$, $g^{\mu\sigma}a_{\sigma\nu}=a^\mu{}_\nu$ のようになる．とくに (3) は $g^{\mu\nu}x_\mu x_\nu$ と書ける．また $g^{\mu\sigma}g_{\sigma\nu}=g^\mu{}_\nu$ で，これは Kronecker のデルタに一致する．高階テンソルでも常数テンソルはすべて計量テンソルを使って書き表わせる．ただし，Lorentz 変換を本義のものだけに限れば，$g_{\mu\nu}$ で書き表わせない4階テンソル $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ が存在する．これは ♦完全反対称擬テンソルと呼ばれ，任意の2つの添字のいれかえに関して反対称（したがって μ, ν, ρ, σ がすべて相異なるときのみ0と異なる）で，かつ

$\epsilon_{0123}=1$ として定義される*. 2つの $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ の積である8階のテンソルはまた計量テンソルで書き表わすことができる.

相対論では, すべての物理量は4次元的なスカラー, ベクトル, テンソルのいずれかで表わされなければならない. たとえば, 質点の運動量 $\boldsymbol{p}=(p_1, p_2, p_3)$ とエネルギー E とは, $p_0=E/c$ とおくと1つにまとまって4次元ベクトル p_μ を構成する. p_μ のことを ◆4次元運動量という. $p^2\equiv p^\mu p_\mu=m^2$ と書くと, m はスカラーである. m のことを ◆静止質量またはたんに ◆質量と呼ぶ. 混乱を避けるために, E/c^2 のことは質量とは呼ばないことにする.

一般に任意のベクトル X_μ $(\neq 0)$ について $X^2>0$ のとき ◆時間的(timelike), $X^2=0$ のとき ◆光錐的(lightlike), $X^2<0$ のとき ◆空間的(spacelike)と呼ぶ. 空間的なベクトルの全体は連結しているが, 時間的と光錐的の場合は2つの連結成分から成っている. $X_0>0$ の部分を ◆前方(forward), $X_0<0$ の部分を ◆後方(backward)と呼んで区別する場合がある(1・1図参照). 時間的, 光錐的, 空間的という概念はもちろん Lorentz 変換に対して不変な概念である. これに対し前方, 後方という概念は, 本義 Lorentz 変換に対しては不変であるが, $l_0{}^0<0$ の変換すなわち時間反転を伴った Lorentz 変換に対しては, いれかわる.



1・1 図

1-3 e 電磁場の方程式 電磁場の方程式がそのまますぐに相対論的な式に書き直せることは重要である. $\boldsymbol{H}=(H_1, H_2, H_3)$ を磁場, $\boldsymbol{E}=(E_1, E_2, E_3)$ を電場, ρ を電荷, $\boldsymbol{v}$ をその各点での速度とするとき, ◆Maxwell (マックスウェル)方程式は, 真空中の場合,

---

* 完全反対称擬テンソルが4階なのは Minkowski 空間の次元が4だからで, 一般に n 次元空間では n 階の擬テンソルになる. とくに3次元空間のときは, ϵ_{jkl} を用いると2つのベクトル a_k, b_l のベクトル積が $\sum_{k,l}\epsilon_{jkl}a_kb_l$ のように書き表わされる.

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{H}=0, \qquad \mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}=0 \tag{4}$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{E}=\rho, \qquad \mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}-\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}=\frac{1}{c}\rho\boldsymbol{v} \tag{5}$$

である*. ここに ρ と $\rho\boldsymbol{v}$ は連続の方程式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho\boldsymbol{v})=0 \tag{6}$$

を満足する. 4 次元の反対称 ♦電磁場テンソル $F_{\mu\nu}=-F_{\nu\mu}$ を

$$F_{\mu\nu}\equiv\begin{bmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ +E_1 & 0 & +H_3 & -H_2 \\ +E_2 & -H_3 & 0 & +H_1 \\ +E_3 & +H_2 & -H_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix}\mu=0\\ \mu=1\\ \mu=2\\ \mu=3\end{matrix} \quad (\text{columns } \nu=0,1,2,3) \tag{7}$$

によって定義すれば, (4), (5) はそれぞれ

$$\partial^{\nu}(\epsilon_{\mu\nu\sigma\tau}F^{\sigma\tau})=0 \tag{8}$$

$$\partial^{\nu}F_{\mu\nu}=-j_{\mu} \tag{9}$$

とまとめて書くことができる**. ただし j_{μ} は ♦4 次元電流で, $j_0\equiv\rho$, $\boldsymbol{j}\equiv\rho\boldsymbol{v}/c$ で定義される. (6) によって ♦電流保存則

$$\partial^{\mu}j_{\mu}=0 \tag{10}$$

を満足する. (8), (9), (10) で用いた ∂^{μ} は $\partial/\partial x_{\mu}$ の略で, 今後とくに必要のない限りこの略記法を用いる. 変数 x を明示する必要があるときは, $\partial^{x,\mu}$ や $\partial^{x}{}_{\mu}$ のように書く.

通常のベクトル・ポテンシャル $\boldsymbol{A}$ と, スカラー・ポテンシャル ϕ とを一括してこしらえた ♦4 次元電磁ポテンシャル A_{μ} を導入すると, (8) のおかげで

$$F_{\mu\nu}=\partial_{\mu}A_{\nu}-\partial_{\nu}A_{\mu} \tag{11}$$

のように表わすことができる. (11) を (9) に代入すると,

$$\Box A_{\mu}-\partial_{\mu}\partial^{\nu}A_{\nu}=j_{\mu} \tag{12}$$

となる. ただし

$$\Box\equiv\partial^{\mu}\partial_{\mu}=\partial_0{}^2-\Delta \tag{13}$$

で ♦d'Alembertian (ダランベルシアン) と呼ばれる (符号に注意). ここに Δ はもちろん 3 次元の Laplacian (ラプラシアン) である.

---

* もちろん有理単位系を用いている.

** $\mathrm{div}\,\boldsymbol{E}=\sum_k \partial E_k/\partial x_k=\sum_k \partial^k E_k=-\sum_k \partial_k E_k$ (符号に注意).

(11) と (12) は (8) と (9) と同等であるが，(11) と (12) は A_μ の代りに $A_\mu+\partial_\mu\Lambda$ を代入しても不変である．$\partial_\mu\Lambda$ だけ A_μ を変えることを ♦ゲージ変換 (gauge transformation)，そのとき電磁場 $F_{\mu\nu}$ や方程式 (8), (9), (12) が不変なことを ♦ゲージ不変性 (gauge invariance) と呼ぶ．相対論的要請からは，Λ はスカラーでなければならないが，ゲージ変換という概念自体は相対論的共変性を破るような形の場合にも使われる．

$\Box\Lambda=-\partial^\mu A_\mu$ なる Λ を用いて A_μ を $A_\mu'=A_\mu+\partial_\mu\Lambda$ にゲージ変換すると，$\partial^\mu A_\mu'=0$ となる．あるいはダッシュを省いて書くと

$$\partial^\mu A_\mu=0 \tag{14}$$

である．これを ♦Lorentz 条件といい，A_μ がこの条件を満足する場合を考えることが多い．このとき (12) は

$$\Box A_\mu=j_\mu \tag{15}$$

という簡単な形になる．(14), (15) は d'Alembert 方程式 $\Box\Lambda=0$ を満たす Λ に対してだけゲージ変換しても不変である．

1-4 量子力学

Newton (ニュートン) 力学やその相対論的拡張は，分子くらいよりも大きな物体の運動を記述するのには極めて普遍妥当する理論である．しかしながら，原子の内部や原子核のような極微の系の運動を論じたり，物質構造を研究したりするときは，量子力学を用いなければならない．量子力学を特徴づける基本常数は，よく知られた ♦Planck (プランク) の常数 h を 2π で割った

$$\hbar=1.0546\times10^{-27}\ \mathrm{erg\cdot sec} \tag{1}$$

である．$\hbar\to0$ の極限をとる量子力学は古典力学に帰着する．

1-4 a Schrödinger 方程式 非相対論的な量子力学の基礎方程式は ♦Schrödinger (シュレディンガー) 方程式である．古典力学の ♦Hamiltonian (ハミルトニアン) $H(q_1, \cdots, q_n; p_1, \cdots, p_n)$ が座標 $q_1, \cdots, q_n$ とその正準共役運動量 $p_1, \cdots, p_n$ の関数として知られている系に対して，Schrödinger 方程式は斉次線形偏微分方程式

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t}-H(q_1, \cdots, q_n; -i\hbar\partial/\partial q_1, \cdots, -i\hbar\partial/\partial q_n)\right]$$
$$\times\psi(t; q_1, \cdots, q_n)=0 \tag{2}$$

で与えられる．ここに $\psi(t;\ q_1, \cdots, q_n)$ は ♦Schrödinger の波動関数と呼ばれる複素数値の実変数関数である．これは時刻 t における量子力学的状態を表わす量と考えられる．古典力学の運動方程式から Schrödinger 方程式またはそれと同等な形式に移ることを ♦量子化 (quantization) という．

$q_1, \cdots, q_n$ の任意の関数 $f(q_1, \cdots, q_n)$ に対し，

$$q_j(\partial/\partial q_k)f-(\partial/\partial q_k)(q_j f)=-\delta_{jk}f \tag{3}$$

であるから，♦交換子 (commutator)

$$[A,\ B]\equiv AB-BA \tag{4}$$

の記号を用いると，(3) は

$$[q_j,\ -i\hbar\partial/\partial q_k]=i\hbar\delta_{jk} \tag{5}$$

と書ける．このように q_j と $-i\hbar\partial/\partial q_j$ は順序を勝手に変えられない量だから，古典力学の Hamiltonian H が与えられていても量子化の仕方は一義的ではない．そこで正しい量子化はどれかということが問題になる．幸い直交座標系を用いると，すなおなおきかえでうまくいく場合が多い．たとえば，質量 m の粒子がポテンシャル $V(\boldsymbol{x})$ の中を運動しているとき，

$$H(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{p})=\boldsymbol{p}^2/2m+V(\boldsymbol{x}) \tag{6}$$

であるから，対応する Schrödinger 方程式は

$$i\hbar(\partial/\partial t)\psi(t,\ \boldsymbol{x})=[-(\hbar^2/2m)\Delta+V(\boldsymbol{x})]\psi(t,\ \boldsymbol{x}) \tag{7}$$

となる．以下簡単のため (7) を例にとって説明しよう．

1-4 b　波動関数の確率解釈　Schrödinger の波動関数は，本来その絶対値の 2 乗が全空間で積分可能なものだけを考える．すなわち

$$\int\psi^*(t,\ \boldsymbol{x})\psi(t,\ \boldsymbol{x})d^3x=\text{有限} \tag{8}$$

を仮定する．ただし $d^3x\equiv dx_1dx_2dx_3$ で，積分領域は全空間である．したがって，1-2 f で述べたように，Schrödinger の波動関数として許される関数の全体は，ψ を複素ベクトルとみて，ψ と ψ' の内積を

$$(\psi',\ \psi)\equiv\int\psi'^*(t,\ \boldsymbol{x})\psi(t,\ \boldsymbol{x})d^3x \tag{9}$$

で定義すれば，Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ をはるものと考えられる．

(8) によりもちろん $|\boldsymbol{x}|\to\infty$ のとき $\psi(t,\ \boldsymbol{x})\to 0$ であるから，部分積分により関係式

$$\int\psi'^*(t,\ \boldsymbol{x})\frac{\partial}{\partial x_k}\psi(t,\ \boldsymbol{x})d^3x=-\int\left[\frac{\partial}{\partial x_k}\psi'^*(t,\ \boldsymbol{x})\right]\psi(t,\ \boldsymbol{x})d^3x \tag{10}$$

が得られる．したがって，♦Hamiltonian 演算子*

$$H \equiv -(\hbar^2/2m)\Delta + V(\boldsymbol{x}) \tag{11}$$

は，(9) の記号を使うと

$$(\psi', H\psi) = (H\psi', \psi) \tag{12}$$

を満足する．すなわち H は Hermite 演算子である．

(7) の解 $\psi(t, \boldsymbol{x})$ は $t=0$ のとき $\psi(0, \boldsymbol{x}) = \phi(\boldsymbol{x})$ だとすると，

$$\psi(t, \boldsymbol{x}) = U(t)\phi(\boldsymbol{x}) \tag{13}$$

のように書くことができる．ここに

$$U(t) \equiv e^{-itH/\hbar} \tag{14}$$

は，H の Hermite 性により unitary 演算子であるから，(8) の値すなわち (ψ, ψ) は t に無関係に一定である．そこで

$$(\psi, \psi) = \int |\psi(t, \boldsymbol{x})|^2 d^3x = 1 \tag{15}$$

と ♦規格化することが可能である．ただし規格化しても，相因子 (phase factor)** $e^{i\theta}$ だけの不定性は残る．

ΔV_a を点 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$ の近傍の微小体積とするとき，

$$\int_{\Delta V_a} |\psi(t, \boldsymbol{x})|^2 d^3x \tag{16}$$

を粒子が時刻 t で点 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$ の近傍の体積 ΔV_a 内に見いだされる確率だと解釈する．これを波動関数の ♦確率解釈という．(15) によりこの解釈が矛盾を生じないことがわかる．(15) が t によらないことを ♦確率の保存という．確率解釈の具体的な意味は，観測の問題を詳しく論じないと明確でないが，量子力学に確率概念が必要になる理由は，観測とは量子力学的状態そのものを見るのではなく，ある特定の状態の集合へその状態を無理に押しやる操作だからである．

1-4 c 固有値問題 さて (13) においてとくに $\phi(\boldsymbol{x})$ $(\neq 0)$ が，E を実数として，

$$H\phi = E\phi \tag{17}$$

を満足する場合を考えると，(13) は

$$\psi(t, \boldsymbol{x}) = e^{-iEt/\hbar}\phi(\boldsymbol{x}) \tag{18}$$

のようになり $|\psi(t, \boldsymbol{x})|^2$ は t に依存しなくなる．すなわち，このとき ψ

---

* 以下ではたんに Hamiltonian と呼ぶ．

** 通常 phase は位相と訳されるが，topology の訳語と区別するため本書では相と呼ぶことにする．

は ♦定常状態を表わす．とくに $\phi(\boldsymbol{x})$ が ♦境界条件

$$\lim_{|\boldsymbol{x}|\to\infty}\phi(\boldsymbol{x})=0 \tag{19}$$

を満たすとき，(17) の解の表わす状態を ♦束縛状態という．たとえば，原子内の電子は束縛状態の例である．(17) を (19) の境界条件の下で解く問題は，♦固有値問題としてよく知られている．E を Hermite 演算子 H の ♦固有値，ϕ を E に属する ♦固有関数または ♦固有ベクトルという．E が実数でなければならないことは，H の Hermite 性から直ちに証明できる．実際，

$$E^*(\phi, \phi)=(H\phi, \phi)=(\phi, H\phi)=E(\phi, \phi) \tag{20}$$

かつ $(\phi, \phi)\neq 0$ だから，$E^*=E$ でなければならない．固有値問題の一般論から，固有値は $E=E_0$, E_1, E_2 $\cdots$ のようにあるとびとびの値だけが許される．H は系の Hamiltonian であるから，その固有値は系の定常状態のとりうるエネルギー準位であると解釈する．すなわち，(17) を (19) の下に解けば固有値として束縛状態のエネルギー準位が求められる．今の場合，これらのエネルギーの値はすべてマイナスである．つまり，それと絶対値の等しいエネルギー(これを ♦結合エネルギーという)を外から与えられなければ，束縛から逃れて自由になることはできない．固有値 E_j に属する固有関数を ϕ_j と書くと，もし $E_j\neq E_k$ ならば ϕ_j と ϕ_k とは直交する．実際，

$$E_k(\phi_k, \phi_j)=(H\phi_k, \phi_j)=(\phi_k, H\phi_j)=E_j(\phi_k, \phi_j) \tag{21}$$

となるから $(\phi_k, \phi_j)=0$ でなければならない．

ポテンシャル $V(\boldsymbol{x})$ がとくに球対称の場合，すなわち $V(\boldsymbol{x})$ が $|\boldsymbol{x}|=r$ のみの関数である場合は，極座標 (r, θ, φ) を用いると (17) は変数分離の偏微分方程式となり，角 θ, φ に関する部分はすぐに解けてしまう．この場合，エネルギー準位は普通 r, θ, φ のそれぞれの自由度に対応する 3 つの ♦量子数 n, l, m を使って表わす．n を ♦主量子数，l を ♦方位量子数，m を ♦磁気量子数という．$l=0$, 1, 2, $\cdots$ のそれぞれに対し $m=-l$, $-l+1$, $\cdots$, $l-1$, l である．このようなとびとびの値だけが許されることは，球関数の理論で周知である．

1-4 d 散乱問題 ポテンシャル $V(\boldsymbol{x})$ の影響が無視できるような遠方からきた粒子が，$\boldsymbol{x}=0$ の近くで $V(\boldsymbol{x})$ の著しい影響をうけたのち再び $V(\boldsymbol{x})$ の影響の及ばない遠くに去っていくという状況を論ずるのが，♦散

乱問題である．散乱問題は時間的に様子が変わっていくのだから，当然(7)を解くべきであるが，境界条件を(19)の代りに遠方では入射波と散乱波とから成るという条件をおいて(17)を解くという形でとり扱うこともできる．しかし，この場合は(19)が成立しないから $|\phi(\boldsymbol{x})|^2$ が積分可能でなくなる*．したがって，この場合はもはや(17)は本来の意味での固有値問題ではない．今度の境界条件の下では，$E \geqq 0$ のすべての E に対して解 $\phi_E(\boldsymbol{x})$ が存在するので，♦連続的固有値と呼ばれる．これに対して，本来の場合のとびとびの固有値のことを ♦離散的固有値と呼ぶ．連続的固有値に属する固有関数は，Hilbert 空間に属するベクトルとみなすことはできないのだが，量子力学ではしばしばこのような固有関数の全体ではられる Hilbert 空間という言い方をする．それは本来の意味での Hilbert 空間のベクトルは，散乱問題ではエネルギー確定の状態にならないので，とり扱いが不便だからである．任意の状態 $\phi(t, \boldsymbol{x})$ は H の固有状態の重ね合せ

$$\phi(t, \boldsymbol{x}) = \sum_j c_j(t)\phi_j(\boldsymbol{x}) + \int_0^{+\infty} c_E(t)\phi_E(\boldsymbol{x})dE \tag{22}$$

のように書き表わせると考えている．

1-4 e Heisenberg 演算子 Schrödinger 方程式では状態を表わす Hilbert 空間のベクトルである波動関数 ϕ は t に依存するが，座標 x_j や運動量に対応する演算子 $-i\hbar\partial/\partial x_k$ は t に依存しなかった．このような記述の仕方を ♦Schrödinger 表示という．これに対して，状態ベクトルの方は t に依存しないものとし，物理量に対応する演算子の方が t に依存するというふうに考えても等価な記述が可能である．後者のやり方を ♦Heisenberg（ハイゼンベルグ）表示といい，Heisenberg 表示での演算子を ♦Heisenberg 演算子という．(13)からわかるように，Heisenberg 表示は Schrödinger 表示と unitary 変換 $U^{-1}(t)$ で結びついている．たとえば，Heisenberg 表示での座標と運動量はそれぞれ t に依存した演算子であるから，$x_j(t)$, $p_k(t)$ のように書くが，これらは Schrödinger 表示では x_j, $-i\hbar\partial/\partial x_k$ であるから，それぞれ

$$x_j(t) = U^{-1}(t)x_jU(t), \qquad p_k(t) = U^{-1}(t)(-i\hbar\partial/\partial x_k)U(t) \tag{23}$$

のように表示できる．Hamiltonian H は，$U(t)$ と H の順序がいれか

---

* これは散乱問題を定常的にするためには，粒子を次から次へと無限にたくさん送りこまねばならないという事情に対応するものと考えられる．

えられるから，Heisenberg 表示でも t に依存しない．

Heisenberg 表示では力学が演算子によって記述されるから，それらが相互にどういう関係を満たしているかを知ることが大切である．A, B を2つの演算子とするとき，その交換子 $[A, B]$ を既知の量で表わすことを♦交換関係(commutation relation)という．とくに $[A, B]=0$ であるとき A と B は ♦可換(commutative)であるという．たとえば，(23)と(5)からわかるように，同時刻での座標と運動量の交換関係は

$$[x_j(t),\ p_k(t)]=i\hbar\delta_{jk} \tag{24}$$

となる．またもちろん

$$[x_j(t), x_k(t)]=0, \qquad [p_j(t), p_k(t)]=0 \tag{25}$$

である．(24), (25)をまとめて ♦正準交換関係(canonical commutation relation)という．Heisenberg 表示では(23)よりもこちらの方を基礎的な式と考え，特定の表示式に頼らないのが原則である．任意の物理量 $A(t)$ の時間依存性は，(23)の例からわかるように，一般に

$$i\hbar(d/dt)A(t)=[A(t), H] \tag{26}$$

という方程式で記述される．(26)を ♦Heisenberg 方程式という．

Heisenberg 表示では，基底ベクトルは固定されているから，物理量を表わす演算子にはそれぞれ行列表示が対応する．したがって，Heisenberg 表示では物理量は行列と同義だと思うことができる．それゆえ，行列のことを quantum(量子)の頭文字をとって ♦q 数，それに対し通常の複素数のことを classical(古典)の頭文字をとって ♦c 数と呼ぶことがある．

1-4 f 物理量と固有値 物理量を表わす演算子の行列表示が対角行列，すなわち $(\lambda_j\delta_{jk})$ のような形の行列であるとき，その対角線上の要素の値 λ_j をその物理量の ♦固有値と呼ぶ．これは(17)の固有値問題を一般化した考えである．(17)の固有ベクトルを基底にとって H を行列表示すれば，H はその固有値を並べた無限次の対角行列になると考えられるわけである．通常 H を対角行列にする表示をとるが，これだけでは基底は一意的に決まらない場合が多い．つまり一般的には同じ H の固有値に属する一次独立な固有ベクトルが2つ以上あるからで，このような場合を ♦縮退しているという．縮退している場合は，同じ固有値に属する固有ベクトルを区別する H と可換な物理量が存在する*．そのときこの物理量も同時に対

* その物理量がどんなものかは必ずしもわからない．

角行列になるように表示を選ぶことができる．それでもまだ基底が一意的に決まらなければ，さらにそれらと可換な物理量をとり，それを対角化する．このようにしていって，互いにどの2つも可換であるような物理量の極大な集合が得られ，その同時固有値の組により基底が完全に決定されることになる．

一般に量子力学では，ある物理量を観測したときに得られる値はその演算子の固有値の1つであると考える．たとえば，H の固有値はその系の可能なエネルギー準位を与えることはさきに述べた．観測される物理量の値は一般に実数値であるから，固有値は実数，したがって物理量は Hermite 演算子であることが要請される．いくつかの互いに可換な物理量は同時に対角化できるから，同時に観測が可能であると考えられる．可換な物理量の極大な集合の観測を行なうことを ♦極大観測という．極大観測によって1つの状態が完全に指定される．

互いに可換でない2つの物理量は同時に対角化できないから，同時に観測できない．一方を正確に測定すれば他方は完全にわからなくなる．しかし，ある程度の不確定さを残すことを許せば（現実の実験では必ず誤差を伴うから不確定さがあるのがあたりまえであるが），両者とも大体の値を定めることは可能である．正準共役な2つの物理量は可換でないので，両者を同時に測定すればその測定値は必ず不確定さが伴う．その不確定さの積は，どんなに理想的に精密な測定をしたと仮定しても，決して $\hbar$ の程度以下にはできないというのが，有名な Heisenberg の ♦不確定性原理(uncertainty principle)である．

1-4 g　角運動量　H と可換な物理量を ♦保存量という．これは Heisenberg 方程式(26)から明らかなように，t に依存しない量だからである．保存量ははじめに観測しておけばいつまでもその固有値を保つから，これを対角化する表示を採用するのが便利である．たとえば，$V(\boldsymbol{x})$ が球対称な場合は，原点に関する角運動量が保存量である．角運動量 $\boldsymbol{M}$ は，古典力学では $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{p}$ とのベクトル積で与えられるから，量子力学ではその交換関係は，正準交換関係(24),(25)により

$$[M_j, M_k]=i\hbar M_l \tag{27}$$

となることがわかる．ただし (j, k, l) は $(1, 2, 3)$ と同じ円順列で表わされるような添字の組とする．(27)の交換子は c 数でないが，その代り M_1, M_2, M_3 だけで閉じた代数をつくっている．この代数は，じつは，系の回

転不変性を表わす直交群 $O(3)$ の Lie 環にほかならない(演習問題 1.4 参照). そしてそれはまた 1-2 e で注意したように特殊 unitary 群 $SU(2)$ の Lie 環と同じである. 実際, $SU(2)$ の generator $\frac{1}{2}\sigma_j$ $(j=1, 2, 3)$ は $M_j/\hbar$ と同じ交換関係を満たす. ここに $\boldsymbol{\sigma}_j$ は *Pauli (パウリ) のスピン行列で

$$\sigma_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{28}$$

で与えられる.

(27) からわかるように, M_1, M_2, M_3 のいかなる 2 つも同時には対角化できない. しかしながら, 角運動量の大きさの 2 乗

$$\boldsymbol{M}^2 = \sum_{k=1}^{3} M_k{}^2 \tag{29}$$

を考えると, これは (27) を使って容易に確かめられるように, すべての M_j と可換である. それゆえ, 通常 $\boldsymbol{M}^2$ と M_3 とを同時に対角化した表示をとる. $M_\pm \equiv M_1 \pm iM_2 = (M_\mp)^\dagger$ とおくと,

$$[\boldsymbol{M}^2, M_+] = 0, \quad [M_3, M_+] = \hbar M_+, \quad [M_+, M_-] = 2\hbar M_3 \tag{30}$$

となるが, $\boldsymbol{M}^2$, M_3 を対角行列として (30) を行列表示で書いて調べると簡単な計算ののち次のことがわかる*. $\boldsymbol{M}^2$ の固有値は $j(j+1)\hbar^2$ $(j=0, 1/2, 1, 3/2, \cdots)$ で, そのそれぞれに対し M_3 の固有値は $m\hbar$ $(m=-j, -j+1, \cdots, +j)$ となる. このように量子力学では角運動量の固有値は必ず離散的である. m のとりうる値からわかるように, 他の自由度を考慮しないときは, $\boldsymbol{M}^2$ の固有値 $j(j+1)\hbar^2$ に属する固有ベクトルの全体は $2j+1$ 次元ベクトル空間をはる. 群の表現論の言葉で言い直すと, $O(3)$ の $2j+1$ 次元表現である. なお j が 1/2 の整数倍になるのは, (27) が $SU(2)$ の Lie 環と一致しているからである.

j の値は, 考えている系の状態が 3 次元空間の座標系を回転するときどのように変換するかを示す指標である. たとえば, 球対称ポテンシャルによる束縛状態については, j は整数値であって, それは方位量子数 l にほかならない. しかし, j が半奇数のときは空間的な意味づけができない. そこで $\boldsymbol{M}$ は

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{s} \tag{31}$$

のように互いに可換な 2 つの部分から成り, $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{s}$ はそれぞれで角運動量

* この証明はどの量子力学の教科書にも書いてある.

の交換関係を満たし，$\boldsymbol{L}^2$ の固有値が $l(l+1)\hbar^2$ ($l=0, 1, 2, \cdots$) であるものと考える．$\boldsymbol{L}$ を ♦軌道角運動量，$\boldsymbol{s}$ を ♦スピン角運動量あるいはたんに ♦スピンという．スピンの固有値は $\hbar$ を単位として半奇数値をもとりうるもので，これは粒子自身の内部自由度に由来する角運動量であると考える．実際，電子や陽子のような素粒子は，スピンが1/2であることが知られている (1-5 b 参照).

1-4 h　相対論的量子力学　以上，非相対論的量子力学の概略を述べたが，量子力学を相対論の要請に合致するようにした ♦相対論的量子力学もある．その最も輝かしい成果は，スピン1/2の粒子に対する ♦Dirac 方程式で，相対論の要請からみごとにスピンの存在を導出した．これは数学的にいえば，$O(3, 1)$ と $SL(2, \boldsymbol{C})$ が同じ Lie 環をもつことに相当している．しかしながら，相対論的波動方程式は，一般に相対論の要請から運動量とエネルギーを対等の立場で扱わねばならないので，必然的に負エネルギーの解がでてきてこれをどう解釈するかが問題となる．Dirac はこれに対し ♦空孔理論 (hole theory) という曲芸的解釈を与えたが，自然な解釈を与えるにはどうしても場の量子論にまで進まねばならないのである．

1-5 素 粒 子 論

素粒子論の対象はもちろん ♦素粒子 (elementary particle) である．素粒子は，現在知られている限りでの，物質の最も根元的な構成要素である．本節では素粒子の性質を簡単に述べたあと，場の量子論を中心とした素粒子論をごくおおざっぱに概観する．

1-5 a　自然単位　古典物理学では，CGS 単位系または最近では MKS 単位系が用いられるが，これらの基本単位のとり方は人為的である．すなわち，その単位系はたんなる歴史的偶然の所産にすぎない．これに対し，素粒子物理学では，基本単位として最も根本的な自然常数を選ぶ．すなわち，相対論の基礎となる光速度 c と量子論を特徴づける $\hbar$ とを1にとる．これを ♦自然単位 (natural units) という．本書では以下すべて自然単位を採用する．

c や $\hbar$ と対等の権利を有すると思われる第3の自然常数がまだ見いだされていないので，自然単位ではすべての量がたとえば長さの次元のベキで書き表わされることになる．これを $[L^k]$ で表わそう．k は通常整数また

は半奇数である．素粒子論で現われてくるいろいろな量がどういう次元をもつかを覚えておくことは，物理的意味の理解や計算結果のチェックなどに極めて有益なことである．自然単位では，長さ，時間の次元はもちろん $[L^1]$，運動量，エネルギー，質量の次元は $[L^{-1}]$，角運動量，作用の次元は $[L^0]$ である．

1-5 b　素粒子の種類　現在素粒子と呼ばれているものの種類は，数え方に著しく依存するのではっきりしたことはいえないが，おおよそ300種ということになろうか．それでその多くはさらに基本的な構成要素から成るとする仮説もいくつか提唱されているが，それに対する確証は今のところ全くない．

素粒子は通常4つのグループに大別される．

第1のグループに属するのは ♦光子 (photon，略号 γ) のみである．光子は古くから知られている電磁場の量子で，スピンは1，質量は0である．もしも重力場にも量子(重力子という)が存在することがわかれば，それもこのグループに入れるべきであろう．

第2のグループは軽粒子(lepton)と呼ばれ，現在4種類の粒子が知られているが，スピンはいずれも1/2である．代表的なものは，最もよく知られた ♦電子 (electron，略号 e) である．電子の質量は*

$$m_e = 9.1096 \times 10^{-28}\,\mathrm{g} \tag{1}$$

で，質量0以外の素粒子のうち最小の質量であるので，これを質量の基準に用いることがある．♦ミュー粒子 (muon，略号 μ)** は，電子と全くうりふたつのよく似た粒子であるが，質量だけは m_e の約207倍もあり，約 2×10^{-6} sec で自然に崩壊してしまう．電子，ミュー粒子にはそれぞれ相棒の ♦中性微子 あるいは ♦ニュートリノ (electron-neutrino，略号 ν_e; muon-neutrino，略号 ν_μ) と呼ばれる，相互作用の極めて弱い粒子がある．それらの質量はともに0であると信じられている．

第3のグループは ♦中間子(meson)と呼ばれ，スピンは整数である．これらはすべてミュー粒子より重くまたより速く自然に崩壊する．代表的なものは，♦パイ中間子(pion，略号 π)と ♦ケイ中間子(kaon，略号 K)で，

* 最近では，素粒子の質量を加速器物理のエネルギー単位である MeV ($=10^6$eV) を使って表わすのが普通である．$m_e=0.511$ MeV (自然単位) であるから，m_e を単位として表わした数字の大体半分が MeV で表わした数字になる．

** 以前はミュー中間子と呼ばれたが，この名前は誤解を招くので現在ではほとんど使われない．

これらはともにスピン0である．パイ中間子は最初 Yukawa (湯川) により理論的に予言されたもので，原子核の結合力の主なにない手である．3種類 (π^+, π^0, π^- ($=\overline{\pi^+}$)) あって，質量は π^0 が約 $264m_e$, π^+ と π^- が $273m_e$ である．ケイ中間子は4種類 (K^+, K^0, $\overline{K^0}$, K^- ($=\overline{K^+}$)) あり，質量は約 $966m_e$ である．

第4のグループは ♦重粒子(baryon)と呼ばれ，スピンは半奇数である．重粒子のうち最も質量の小さいのは，♦陽子(proton, 略号 p) で，スピンは 1/2, 質量は約 $1836m_e$ で，安定である．陽子よりも $2m_e$ ほど質量の大きい ♦中性子(neutron, 略号 n) もスピン 1/2 であるが，単独でいると約 10^{+3} sec でベータ崩壊する．陽子と中性子は，周知のように原子核の構成要素であり，よく似た粒子なのでまとめて ♦核子(nucleon, 略号 N) と呼ばれる．核子以外の重粒子のことを ♦重核子(hyperon) というが，その中で寿命の長い(といっても 10^{-10} sec ぐらいであるが)のは，♦ラムダ (lambda) 1種類 (Λ^0), ♦シグマ (sigma) 3種類 (Σ^+, Σ^0, Σ^-), ♦グザイ (xi) 2種類 (Ξ^0, Ξ^-), ♦オメガ (omega) 1種類 (Ω^-) である．前3者はスピン 1/2, オメガはスピン 3/2 である．

なお中間子と重粒子を一括して ♦強粒子(hadron)という*.

1-5 c 素粒子の相互作用 素粒子に対しては極端に微弱な重力の相互作用を除外すると，知られている素粒子の相互作用は，♦弱い相互作用 (weak interaction), ♦電磁相互作用(electromagnetic interaction), ♦強い相互作用(strong interaction)の3つに大別される．相互作用の強さを表わすのに，♦結合常数 (coupling constant) というパラメーターが使われる．

電磁相互作用は古くから知られている荷電粒子と電磁場との相互作用であり，遠隔作用のようにみえる Coulomb(クーロン)力も電磁相互作用の形で近接作用として理解することができる．電磁相互作用の著しい特徴は，すべての荷電素粒子 (e, μ, π^+, π^-, K^+, K^-, p, Σ^+, Σ^-, Ξ^-, Ω^- など) に対して，符号を除き，完全に普遍的であることである．その結合常数 e は，電気素量として古くから知られているものにほかならない．観測にかかる量はそれを e^2 の整数ベキの形で含んでいるので**, $\alpha=e^2/4\pi$ (自然

---

* 原稿執筆中に，スピン1で質量は核子の3倍余りの，普通の強粒子とは考えにくい一連の新素粒子の発見が報ぜられた．

** 正しくは e の代りにくりこんだ e^{ren} を使うべきである (6-2 参照)．

単位を使わなければ $\alpha=e^2/4\pi\hbar c$) と書き，♦微細構造常数 (fine structure constant) と呼ぶ．α の大きさは，奇妙な習慣があって逆数の形で表わすことになっている．

$$\alpha^{-1}=137.036 \tag{2}$$

α の値が1に比べてずっと小さいということは，理論の結論を近似計算するのに非常に幸いなことであった．電磁相互作用の第2の特徴として，他の相互作用が原子核の内部くらいの非常に小さな範囲にしか及ばないのに対し，電磁相互作用だけは重力同様マクロなスケールでも作用が到達するという性質がある．このことは光子の質量が0であるためで，理論構成のさいいつでも厄介な問題をひき起こす．第3の特徴は，電磁場のゲージ不変性ということで説明される性質であるが，電磁場との相互作用により素粒子が他の素粒子に転化することは決して起こらないことである．

強い相互作用は，強粒子の間にのみ働く．理論上は重粒子と中間子との間に働くと考えられている．結合常数の大きさは，もちろん相互作用の形をきちんと指定しないと正確には定義できないが，大体の目安として結合常数の2乗の $1/4\pi$ が1から10程度と思ってよい．結合常数がこのように大きいため，強い相互作用に関する計算を精密に行なうことは著しく難しくなる．またこのように強い相互作用をするということが，強粒子の種類数がむやみに多いことと無関係ではないと考えられている．

弱い相互作用は，電磁相互作用と比べても著しく弱いので，20世紀中葉頃までは原子核のベータ崩壊や素粒子の崩壊という形でのみ観測されていたものである．結合常数は長さの単位のとり方に依存するが，その大きさの大体の見当は 10^{-7} 程度であると思ってよい*．光子を除くすべての素粒子は弱い相互作用に関与すると考えられる．ただし中間子の弱い相互作用は，中間子と重粒子との強い相互作用と，重粒子の関係する弱い相互作用の組み合せとして説明することもできる．

素粒子が相互作用して反応を起こすと，一般に反応の前後では素粒子の数や種類が変化する．このことは，素粒子の描像を描くにあたって最も重要なことである．

1-5 d　対称性と保存則　系の物理量にある変換を施しても，系が全体として不変であるとき，その系はその変換に関する♦不変性 (invariance)

* 弱い相互作用では，その相互作用の形から結合常数の2乗をとらないで比較する方が自然なのである．

あるいは ♦対称性(symmetry)をもつという．系が Hamiltonian H で記述されるならば，その変換を表わす演算子(連続変換のときは普通その generator をとる)は H と可換である．それゆえ，対称性があれば変換の演算子または generator の表わす物理量が保存する．これを ♦保存則(conservation law)といい，その保存する物理量を ♦保存量という．保存量の固有値あるいはその指標を ♦量子数という．

保存則の代表的なものは，時間空間の平行移動不変性に対応する ♦エネルギー運動量保存則，回転不変性に対応する ♦角運動量保存則があげられる．このほか時空間と無関係な素粒子内部の自由度に関する保存則として，♦荷電保存則，♦重粒子数保存則，♦軽粒子数保存則，♦ミュー粒子数保存則などが知られているが，これらの量子数はいずれも整数値のみをとる．実際個々の素粒子については，0と $+1$ と -1 だけが実現されている(ただし荷電は非常に寿命の短い素粒子では絶対値2以上のものがある)．

以上のほかに，弱い相互作用を無視した近似で成立する保存則がいくつかある．♦空間反転(space inversion，略号 P)，♦時間反転(time reversal，略号 T)，♦荷電共役(charge conjugation，略号 C)，♦ストレンジネス(strangeness)などがそれである．はじめの3つは量子数が(+)と(−)の2つの値しかとらない不連続変換である．とくに空間反転の量子数は ♦偶奇性あるいは ♦パリティ(parity)と呼ばれる．1957年に行なわれた実験で弱い相互作用におけるパリティおよび荷電共役不変性の破れが確認された．これに対し，時間反転の破れはパリティの破れの 10^{-3} 程度であることが確かめられている．

荷電共役は，素粒子をその反粒子といれかえる変換である．ただしある素粒子 a の ♦反粒子(anti-particle) $\bar{a}$ は，a と同じスピンをもち，かつ a のもっている整数値をとる量子数の符号をすべて逆にした量子数をもつような素粒子である．もちろん $\bar{a}$ の反粒子は a 自身にほかならない．整数値をとる量子数がすべて0である光子や中性パイ中間子 (π^0) など以外のすべての素粒子は，自分と相異なる反粒子をもつ．反粒子は通常記号にバーをつけて表わす．たとえば，$\bar{e}$ は陽電子，$\bar{p}$ は反陽子である．素粒子の種類の項 (**1-5 b**) では，軽粒子の反粒子と重粒子の反粒子とは記載を省略してある．

相対論的不変な理論では，荷電共役，空間反転，時間反転の3つを続けて行なったとき不変であることが，非常に一般的な仮定の下に証明でき

る．これを ♦*CPT* 定理という．*CPT* 定理により，*CP* に対する不変性の破れは T の破れと同じでなくてはならないが，実験結果はそれを支持している．また *CPT* 定理から，素粒子とその反粒子の質量や寿命がそれぞれ互いに相等しいことがいえる．

ストレンジネスは，強粒子に対してだけ定義されている整数値をとる量子数である．さらに強粒子に対しては，強い相互作用についてだけ保存する ♦アイソスピン(isospin)がある．これは仮想的に考えた群 $SU(2)$ に対する不変性で，強粒子はすべてこの $SU(2)$ の表現で分類される．たとえば，陽子と中性子は電荷の違いに基づく以外には同じ性質をもつものと考えられるので，$SU(2)$ の同じ表現に属するとする．一般にアイソスピン群 $SU(2)$ の同じ既約表現に属する素粒子は，π^+, π^0, π^- や Σ^+, Σ^0, Σ^- のように同じ文字で表わす．アイソスピンとストレンジネスを統合拡張した概念に ♦$SU(3)$ 対称性 (eightfold way) がある．これは非常に粗い対称性であるが，強粒子族の実験事実の整理に大きな成功を収めた．

1-5 e 統計 2つ以上の同種類の素粒子から成る系を，たとえば Schrödinger の波動関数 ψ で記述する場合，任意の2つの粒子に関する座標やその他の独立な自由度を記述する変数をことごとく入れかえるときに，ψ は不変かまたは $-\psi$ になるかのいずれかであることが知られている．前者，すなわち ψ が完全に対称な関数のとき，その素粒子は ♦Bose (ボーズ) 統計に従うといい，その素粒子を ♦ボソン (boson) と呼ぶ．後者，すなわち ψ が完全に反対称であるとき，その素粒子は ♦Fermi (フェルミ) 統計に従うといい，その素粒子を ♦フェルミオン (fermion) という．2つの関数 $\varphi_1(x)$ と $\varphi_2(y)$ から作られる x と y に関して反対称な式 $\varphi_1(x)\varphi_2(y)-\varphi_1(y)\varphi_2(x)$ は φ_1 と φ_2 が同じ関数のとき恒等的にゼロになるので，2つのフェルミオンは同時に全く同一の状態をとることはできない．これを Pauli の ♦排他原理 (exclusion principle) という．スピンが整数値の素粒子すなわち光子と中間子はボソンで，スピンが半奇数の素粒子すなわち軽粒子と重粒子とはフェルミオンであることが知られている．これを ♦スピンと統計の関係という．この規則は，量子化にさいして不定計量の Hilbert 空間を用いないものとすれば，理論的に証明できる*．

理論的に可能な統計としてはこのほかに ♦パラ統計と呼ばれる一連の奇妙な統計があるが，パラ統計に従う素粒子は1つも見つかっていない．

---

* 統計は Bose か Fermi のどちらかと仮定しての話である．

1-5 f 場の量子論 素粒子論の代表的な理論は ♦場の量子論 (quantum field theory) である. 実際過去においては, 場の量子論と素粒子論とはほとんど同義に用いられていた. 場の量子論の建設は, 量子力学の建設のわずか4年後1929年の Heisenberg-Pauli の仕事にさかのぼるが, 相対論的共変性の要請を満足した本当の意味での場の量子論が一応完成したのは 1949 年で, Tomonaga (朝永), Schwinger (シュヴィンガー), Feynman (ファインマン), Dyson (ダイソン) の4人の業績に負うところが大きい. この当時, 実際に扱われたのは ♦量子電磁力学 (quantum electrodynamics) であるが, これは現在でも電子と電磁場とから成る系を記述する最も完璧な理論で, 場の量子論のプロトタイプとされている. 量子電磁力学では微細構造常数 α が小さいため, α のベキ級数展開(一般に結合常数のベキ級数展開を ♦摂動展開という) のはじめの数項をとることにより, 極めてよい精度の近似値が計算できる. そしてその理論値は驚くべき高い精度で実験値と一致している(6-6 参照). 量子電磁力学の理論値は, 実験誤差内でつねに実験値と一致しているから, いちいち実験値との比較を記載する必要はないくらいである.

場の量子論は誕生のときから内部矛盾を包含していた. それは物理的に有限であるべき量が, 計算すると無限大になってしまうことである. これを ♦発散の困難という. 幸い量子電磁力学や, それに似せて作られた強い相互作用の場の量子論では, ♦くりこみ (renormalization) と称する無限大引き算法で不定性を残さずにうまく有限の値を引き出すことに成功した. くりこみ理論は, 上述の相対論的に共変な場の量子論の定式化と表裏一体をなすものである. くりこみ可能性の証明は, 大要は Dyson によって与えられたが, その厳密証明ができ上がったのは比較的最近のことである.

場の量子論に関する詳しい説明は, 本書の2章以下でなるべく現代的な視点から行なう. とくにくりこみについては6章で解説する.

1-5 g 場の量子論における解析性 量子電磁力学で輝かしい成功を収めた摂動展開の方法も, 強い相互作用に適用すると結合常数が大きいため近似が極めて悪くほとんど役に立たない. そこで理論の答を直接計算することをあきらめて, 場の量子論を構成する一般的な枠組から近似なしにいえることはどういうことかを調べるのが重要になってきた. この方面の研究の成果として第一にあげなければならないのは, ♦分散公式 (dispersion relation) であろう. 素粒子論において散乱問題を記述する量は ♦散乱振

幅(scattering amplitude)と呼ばれる(エネルギーと散乱角の)関数であるが，これは通常の場合エネルギーの関数としてある解析関数の実軸上の境界値になっている．この解析関数が上半面で正則であり，かつ無限遠方で減少するように細工することができれば，1-1 の(27)の関係式が成立する．この式は物理では分散公式と呼ばれている*．前方散乱（散乱角が0)の場合の分散公式は直接実験で測れる量の間の関係を与えるので，近似なしに場の量子論の基礎の正しさを実験的に験証できる．現在までのところ，分散公式の破れた例は1つも見つかっていない．

分散公式を厳密に，そしてなるべく一般的な形で導出する問題から始まった場の量子論における解析性の研究は，数々の重要な成果をもたらした．本書では5章において摂動展開の各項の解析性に関する主な結果を述べる．

なお，散乱振幅の解析性と，1-5 i に述べる S 行列の unitary 性のみから，♦Froissart(フロワサー)-Martin(マルタン)の上界などの散乱振幅の高エネルギーでの漸近的振る舞いに対するかなり強い制約が証明されることは，注目に値する．

1-5 h 公理論的場の理論 場の量子論における解析性の探求は，多変数解析関数論などが応用され次第に数学的に難しくなっていったが，それとともに場の量子論の体系自身をもっと厳密な数学の上にうちたてようとする動きが強くなってきた．この立場を ♦公理論的場の理論(axiomatic field theory)という．公理論的場の理論では，一連の公理系から出発しすべて厳密に証明できることのみを用いるので，発散の困難は起こらない，というよりは発散するような量ははじめから定義されえないのである．公理系のとり方はいくつもあるが，代表的なものは ♦Wightman(ワイトマン)の公理系であろう．ただ公理論的場の理論で実際的に有用な結果を導くことはあまりできない．主な成果としては，CPT 定理やスピンと統計の関係の厳密証明，♦Haag(ハーグ)-Ruelle(ルエル)の散乱理論などがあげられよう．厳密な理論の強みは成果が着実に積みあげられていくことである．また問題によっては，あいまいさにわずらわされることがないため，かえって厳密にやる方が見通しよく簡明になる場合もある．

なお最近の特筆すべき成果として，♦構成的場の理論(constructive field theory)があげられる．これは通常の形式の場の量子論を厳密な数学の上

* この名前は最初この式が光の分散の問題に現われたことに由来する．

に再現しようとするもので，今まで全く手のつかなかった，相互作用のある場合の場の量子論の無矛盾性についてもたしかな知見が得られるようになってきた.

1-5 i　*S* 行列理論　素粒子論において散乱問題を記述する基本的な量は，♦*S* 行列 (*S*-matrix) である．*S* 行列の概念自身はもともと量子力学での散乱問題の定常的なとり扱いにおいて得られたものであるが，その真の重要性は素粒子論においてはじめて明らかとなる．素粒子の反応は途中のことは度外視して初めと終わりだけを眺めると，素粒子の組 $(a, b, \cdots)$ が素粒子の組 $(a', b', \cdots)$ に変化する現象にほかならない．これを式で

$$a+b+\cdots \longrightarrow a'+b'+\cdots \tag{3}$$

のように書く．反応はすべての保存則を満たしていれば可能で，粒子の総数は一般に変化する*. (3) で各粒子の 3 次元運動量の値やその他の独立な自由度をすべて行列要素を指定する番号(左辺は列を，右辺は行を)と考えて作った巨大な行列が *S* 行列である．*S* 行列要素の絶対値の 2 乗は，対応する反応の起こる確率と解釈される．したがって，確率保存の要請と 1-2 d で述べた数学的理由により，*S* は unitary でなければならないことがわかる.

相対論の要請により，*S* 行列は全体として Lorentz 変換に対して不変でなければならないが，個々の行列要素はそうはなっていない．行列要素を 4 次元運動量などの関数として Lorentz 共変な形に書き改めたものを♦遷移振幅 (transition amplitude) という．とくに 2 粒子から 2 粒子への反応の遷移振幅を散乱振幅と呼ぶ(両者を同義に使うこともある).

さて，♦*S* 行列理論 (*S*-matrix theory) とは，反応の途中のことはブラックボックスとして一切ふれないで *S* 行列だけを基礎的な量と考える立場である．しかしながら，unitary 性と Lorentz 不変性だけでは *S* 行列は決まらない．もちろん *S* 行列は場の量子論を使えば，少なくとも原理的には具体的に完全に計算できるものであるから，*S* 行列がほかにどんな一般的性質をもつかを調べてみることができる．Chew (チュー) は遷移振幅の解析性の重要性に着目した．とくに摂動級数の各項の解析性や，Mandelstam (マンデルスタム) によって提唱された♦二重分散式 (Mandelstam representation) が重要な役割を演ずる.

遷移振幅は，一般的にいって解析関数の境界値であると考えられる．そ

* 実際上，左辺が 2 粒子系以外のときは実験できない.

こで **1-1 f** で述べた解析関数の解析接続の一意性を用いると，次の著しい性質がでてくる．(3) で‘右辺または左辺にある素粒子を左辺または右辺に移すとき，それをその反粒子に変える’という移項の法則を仮定すると，この移項の法則によって得られる起こりうるすべての反応の遷移振幅は単一の解析関数の異なる境界値となる．これを ♦交差対称性 (crossing symmetry) という．そして同じ解析関数で表わせる各反応を ♦チャンネル(channel)と呼んでいる．

反応 (3) において a, b などは素粒子であると書いたが，一般的にいえば，ここに原子核のような素粒子の安定な複合系が現われることも可能である(たとえば $d+\pi^+ \to p+p$, ここに d は重陽子)．一般に素粒子の安定(または準安定)な束縛状態を ♦複合粒子 (composite particle) というが，それらは素粒子とともに，遷移振幅を境界値とする解析関数の単純極に対応することが知られている．それゆえ，S 行列理論では素粒子と複合粒子の区別がつかない．たとえば，d は通常 p と n の複合粒子と考えられているが，逆に n を $\bar{p}$ と d の複合粒子と考えることもできるわけである．そこでどの強粒子もいくつかの強粒子の複合粒子であって，どの強粒子がより基本的であるとはいえないのだという立場をとることが論理的に可能である．このような考え方を ♦核民主主義 (nuclear democracy) という．さらにこのアイデアに徹したのが ♦bootstrap の思想で，インプットとアウトプットが相等しいという要請ですべてが決まるという立場である．つまり，いかなる粒子が実在するかということと，それに対する S 行列の解析的性質が互いに他を規制するので，全体として自己無撞着になるようにさえすればすべてがきちんと決まるはずだという，かなり楽観的な考え方である．

S 行列理論はいろいろと示唆に富むアイデアを含むが，解析性に関する要請が極めてあいまいなので，完全な理論体系とはいいがたい．

1-5 j　Regge 極理論と双対共鳴模型　S 行列理論的な考え方から産み出された最も重要な成果として，♦Regge (レッジェ) 極理論 (Regge pole theory) がある．通常の量子論ではたとえば軌道角運動量 l は 0, 1, 2, … といったとびとびの値しかとりえないが，Regge 極理論ではこれを複素変数に拡張し，散乱振幅を重心系のエネルギーの 2 乗 s と角運動量 l との解析関数として記述する．このときこの関数の極は ♦Regge 極と呼ばれるが，$l=\alpha(s)$ のような関数関係を満たす点であるので，その全体を

♦Regge 軌跡 (Regge trajectory) と呼ぶ．強粒子がそのスピンと質量の関係においてすべていくつかの Regge 軌跡の上にのっているらしいことは，かなり実験的支持がある．しかし量子力学的考察からの期待に反して現実の Regge 軌跡は驚くほど直線的である．

Regge 軌跡はさらに散乱振幅の交差対称性により移れる他のチャンネルでの高エネルギーの漸近的振る舞いを規制する．Regge 極によって生ずる特徴的な高エネルギーでの振る舞いを ♦Regge 的振る舞い (Regge behavior) という．Regge 的振る舞いは，実験的に成立している場合とそうでない場合とがあるが，成立していない場合は新しい仮定をもち込んで逃げることができる．Regge 極理論はたしかに多様な現象をうまく説明するが，それで何もかも説明しようとするのは無理があるようである．

強粒子が Regge 軌跡上にのっていることと，高エネルギーでの Regge 的振る舞いが同一のチャンネルでの同一の事柄の二様の現われ方であるとする考え方が，♦有限エネルギー和則 (finite-energy sum rule) などを通じてはっきりとらえられるようになった．これを ♦双対性 (duality) という．1968 年 Veneziano (ヴェネチアーノ) は，直線的 Regge 軌跡をもちかつ双対性と交差対称性の要請を満たす散乱振幅の簡単な実例を提起したが，これが出発点となって ♦双対共鳴模型 (dual resonance model) と呼ばれるみごとな理論体系ができた．この理論の内蔵する困難が将来どこまで克服されるかは興味ある問題である．なお双対共鳴模型は，♦弦模型 (string model) と呼ばれる場の量子論的手法をまねた理論形式からも再現できる．

1-5 k　いろいろの理論　現在の素粒子論が当面解決しなければならない主要な問題は，素粒子の多様性とその対称性をどうやってもっと根本的に説明するかということと，発散の困難の本質的解決を与えることであろう．

強粒子族の多様性を，各強粒子がより基本的な粒子から構成される複合粒子であるとして説明しようとするのは，誰しも考えつくところであろう．これを ♦複合模型 (composite model) と総称する．この代表的な例は ♦quark 模型であるが，この模型では $SU(3)$ 対称性の成功を説明するために，3 つのスピン 1/2 の quark と呼ばれる基本粒子の存在を仮定する．quark 模型は，強粒子の対称性のみならずそれらの反応をも非常に簡単な議論で半定量的にうまく説明することに成功したが，quark を場の量子論

で記述しようとするといろいろ不都合なことがいっぱいでてくる．quarkは電荷が 2/3 や −1/3，重粒子数も 1/3 という半端な数で，従う統計もパラ統計というふうに奇妙な粒子と考えなければならない．こんな奇妙な粒子はもちろん観測されていないから，その質量は，陽子よりも小さいと期待されるにもかかわらず，陽子の何十倍も大きいと仮定しなければならなくなる．このような矛盾した様相は，ちょうど Bohr(ボーア)の原子模型の電子軌道を古典力学で説明しようとしているようなものなのかもしれない．

対称性をもう少し場の量子論的手法で論ずる方法として，♦カレント代数(current algebra)や ♦chiral dynamics がある．また最近，場の量子論に関連した話題でとくに興味のもたれている理論としては，♦自発的対称性の破れ(spontaneous symmetry breakdown)の理論(3-7 参照)，そのうちとくに ♦ゲージ理論(gauge theory)，そのテクニックとして利用されている ♦Feynman 経路積分(Feynman path integral)，高エネルギーの振る舞いを論ずる ♦光円錐物理(light-cone physics)や ♦くりこみ群(renormalization group)などがある．もちろんこのほかにも幾多の興味ある理論があり，それらをことごとく列挙することは到底できない．

最後に，現在の量子論の枠組を積極的に変更して，発散の困難を解決しようという数多くの試みがあることを強調しておこう．しかしながら，不幸にして今日までのところこれらの試みはいずれもあまり成功したとはいいがたく，むしろ現在の場の量子論の根本的な改変がいかに困難であるかを雄弁に物語っているものといえよう．いままでの不成功の経験からすれば，発散の困難を最終的に解決するには，Minkowski 空間の時空構造それ自体に何らかの変更を加えることが必要と思われるが，たんに時空間だけをいじくってもだめで，素粒子の存在によってその近くの微小時空間の構造が影響されるような理論を構成しなければならないように思われる．

演習問題 1.

1.1 Cauchy の積分表示 1-1 の (5) を証明せよ．

1.2 $\lim_{\epsilon\to+0}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ipx-\epsilon|x|}dx=2\pi\delta(p)$ を証明せよ．

1.3 直交群 $O(3)$ の 1, 2, 3 軸方向の generator がそれぞれ

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

で与えられることを示し，それらが $M_j/\hbar$ $(j=1,\ 2,\ 3)$ と同じ交換関係（1-4 の (27)）を満たすことを確かめよ．

1.4 陽子の質量の逆数は，自然単位を用いると約何 cm か．

2. 第二量子化

2-1 生成消滅演算子

♦第二量子化(second quantization)とは，波動関数とか電磁場のような時空座標 x_μ の関数を演算子と見直すことである．その言葉としての意味は，量子化というのは c 数を q 数におきかえる操作であり，古典力学の Hamiltonian を q 数にして Schrödinger 方程式を書くのを第一段の量子化とすれば，波動関数自身を q 数にするのは第二段の量子化と考えられるからである．したがって，この言葉は電磁場に対してはあまり適切でなく，♦場の量子化と呼んだ方がよいであろう．

本節では第二量子化の基本的なイメージを説明するため，非常に単純化した場合を考察する．

2-1 a　自由度のない場合　第二量子化ないし場の量子化を行なわなければならない理由は，素粒子は反応や崩壊により生成消滅し，全く異なるものに転化していくようなものだからである．このように，考えている対象それ自身ができたり消えたりするということは，素粒子論以前の物理学ではありえないことであった．そこで場の量子化という問題をいきなり考察する前に，対象自身の生成消滅ということをどういうふうに記述したらよいかを，まず極端に単純化した形で考えてみよう．

この世にただ1種類の粒子しか存在しえないものと想像してみよう．しかもこの粒子は何の自由度も運動量さえももたないものと仮定しよう．そうすると個々のこの粒子には名前をつけることができない．すなわち，2つの粒子をとってきたとき，どちらがどちらであるというような区別は全くできないであろう．ただいえるのは，その粒子が何個あるかということだけである．そこで n 個ある ♦状態(state)というものを考え，これを $|n\rangle$

と記すことにする．とくに $|0\rangle$ は何もない状態なので ♦真空(vacuum)と呼ぶ．粒子の個数というのは1つの物理量であるから，量子論では1つの線形演算子 N として表わされると考えるべきであろう．すなわち，N は $|0\rangle$, $|1\rangle$, $\cdots$, $|n\rangle$, $\cdots$ というような一次独立なベクトルではられるベクトル空間 $\mathfrak{H}$ の上の演算子で，固有値方程式

$$N|n\rangle=n|n\rangle \tag{1}$$

を満足するようなものと考えられる．N を ♦個数演算子(number operator)という．$\mathfrak{H}$ の次元は，この世に何個まで粒子が存在することが許されるかということによってきまるが，簡単のためそのような制約がないとすると，$\mathfrak{H}$ の次元は無限次元となるだろう．$\mathfrak{H}$ の中の一般のベクトルは，形式的に

$$|\alpha\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}c_n|n\rangle \qquad (c_n\text{: 複素数}) \tag{2}$$

のように書き表わされるものと考えられる．

次に，2つのベクトル $|\alpha\rangle$, $|\beta\rangle$ の内積を定義しなければならないが，$(|\beta\rangle, |\alpha\rangle)$ と書く代りに，♦Dirac の記法に従って $\langle\beta|\alpha\rangle$ のように書くのが便利である．$\langle\beta|$ を ♦ブラ・ベクトル(bra-vector)，$|\alpha\rangle$ を ♦ケット・ベクトル(ket-vector)という．これはブラケット(括弧)のかたわれでできたベクトルだからである．なお，Dirac の記法では σ を演算子とするとき，$(|\beta\rangle, \sigma|\alpha\rangle)$ と $(\sigma^\dagger|\beta\rangle, |\alpha\rangle)$ は $\langle\beta|\sigma|\alpha\rangle$ と書かれる．$\langle\beta|\alpha\rangle$ を定義するためには，内積の線形性により $\langle m|n\rangle$ を定義すれば十分であるが，それは

$$\langle m|n\rangle=\delta_{mn} \tag{3}$$

とするのが最も自然であろう．(3)を仮定すると，(2)から

$$\langle\alpha|\alpha\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2 \tag{4}$$

となる．したがって，ノルム $\langle\alpha|\alpha\rangle^{1/2}$ が有限であるためには，(4)の右辺の級数が収束しなければならない．ノルム有限のベクトルのみをとると，$\mathfrak{H}$ は Hilbert 空間になる．

確率解釈を導入するために，量子力学の場合と同様に

$$\langle\alpha|\alpha\rangle=1 \tag{5}$$

と規格化する．(2)と(3)により

$$c_n=\langle n|\alpha\rangle \tag{6}$$

だから，(4)と(5)から

$$\sum_{n=0}^{\infty}|\langle n|\alpha\rangle|^2=1 \tag{7}$$

が得られる．したがって，$|\langle n|\alpha\rangle|^2$ を，$|\alpha\rangle$ という状態を観測して粒子が n 個見いだされる確率と解釈することができる．

さて，いよいよ生成や消滅を表わす演算子を導入することを考えよう．1 個粒子を消す演算子すなわち *消滅演算子 (annihilation operator あるいは destruction operator)を a と書くとき，それはその意味するところから

$$a|0\rangle=0 \tag{8}$$

$$a|n\rangle=h_n|n-1\rangle \qquad (n\geqq 1) \tag{9}$$

を満足すべきであろう．(8) は粒子が 1 つもなければ粒子を消滅させることは不可能であることを表わす．(9) は粒子を 1 個消せば総数は 1 個少なくなることを書いたもので，係数 h_n はこれだけからは決まらない．n 個の粒子系で 1 個消す方法の数はちょうど n 通りあるから，上述の確率解釈の考え方を拡張して

$$|\langle n-1|a|n\rangle|^2=n \tag{10}$$

と仮定するのが自然であろう．そうすると $h_n=\sqrt{n}e^{i\theta}$ となる．相因子 $e^{i\theta}$ は不定であるが，通常これは簡単のため 1 とおく(もちろんそれを残しておいても差し支えない)．$h_n=\sqrt{n}$ とすると，(8) と (9) はまとめて書けて

$$a|n\rangle=\sqrt{n}\,|n-1\rangle \tag{11}$$

となる．a は線形だから (11) によって完全に定義される．

次に *生成演算子(creation operator)を考える．これは明らかに消滅の逆操作だから，$a^\dagger$ を生成演算子と呼ぶのが自然であろう．実際

$$\langle n|a^\dagger|n-1\rangle=\langle n-1|a|n\rangle^*=\sqrt{n} \tag{12}$$

で，それ以外の行列要素は 0 だから，$n-1$ を n でおきかえると

$$a^\dagger|n\rangle=\sqrt{n+1}\,|n+1\rangle \tag{13}$$

となる．(13) から数学的帰納法により，

$$|n\rangle=(n!)^{-1/2}(a^\dagger)^n|0\rangle \tag{14}$$

と書けることがわかる．

なお念のため，$\langle n|$, $|n\rangle$, a, $a^\dagger$ の直観的な行列表示式を書いておこう．

$$\langle n| = (0,\ 0,\ \cdots,\ \overset{n+1\text{ 番目}}{0,\ 1},\ 0,\ \cdots), \qquad |n\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ n+1\text{ 番目} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$a = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{4} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}, \qquad a^\dagger = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{4} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \tag{15}$$

さて，(11)と(13)から

$$a^\dagger a|n\rangle = n|n\rangle, \qquad aa^\dagger|n\rangle = (n+1)|n\rangle \tag{16}$$

となり，nは任意だから(1)と比較すると，

$$a^\dagger a = N, \qquad aa^\dagger = N+1 \tag{17}$$

であることがわかる．すなわち，個数演算子Nは生成演算子と消滅演算子の積として書き表わされる．さらに，(17)から交換関係

$$[a,\ a^\dagger] = 1 \tag{18}$$

が得られる．

2-1 b 自由度のある場合 以上は考えている粒子が何らの自由度ももたない場合の考察であったが，これを自由度をもつ場合に拡張するのは容易である．自由度を表わすのに添字$k\,(=1, 2, \cdots)$を用い，個数演算子をN_k，消滅演算子をa_k，生成演算子を$a_k{}^\dagger$と書く．kの異なる値に対する演算子は全く独立であると仮定する．自由度kをもつ場合の状態ベクトルのはる Hilbert 空間を再び$\mathfrak{H}$と記す．$\mathfrak{H}$の基底ベクトルは

$$|n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_k,\ \cdots\rangle \tag{19}$$

のように表わすことができる．n_kの意味は

$$N_k|n_1,\ \cdots,\ n_k,\ \cdots\rangle = n_k|n_1,\ \cdots,\ n_k,\ \cdots\rangle \tag{20}$$

によって明らかであろう．

なお，数学的な注意であるが，(19)で$\sum_k n_k$は有限であると仮定しなければならない．もしも0でないn_kが無限にたくさんある場合まで全部

含めると，基底ベクトルの個数は可算無限大ではなく，実数全体の濃度と同じ無限大になってしまい，$\mathfrak{H}$ が可分でなくなる．そうすると，たとえば (2) のような基底による展開が級数の形で書けなくなり，非常にとり扱いが難しくなる．0 でない n_k の個数が有限である場合のみを許すとき $\mathfrak{H}$ は可分であるが，このとき $\mathfrak{H}$ を *Fock (フォック) 空間という．質量 0 の粒子の場合とか，相互作用のある場合の時間的変化を問題にする場合に，Fock 空間に話を限るのは必ずしも正当とはいえないが，数学的にあまり厳密なことをいわなければ Fock 空間で間に合うと考えられるので，この問題はこれ以上深く追求しないことにする．

真空 $|0\rangle\equiv|0, 0, \cdots\rangle$ はもちろんすべての k の値に対し

$$a_k|0\rangle=0 \qquad (\text{したがって } \langle 0|a_k{}^\dagger=0) \tag{21}$$

を満たすただ 1 つの状態である．(3), (11), (13), (17), (18) はそれぞれ次のように拡張される．

$$\langle m_1, m_2, \cdots|n_1, n_2, \cdots\rangle=\prod_k \delta_{m_k n_k} \tag{22}$$

$$a_k|n_1, \cdots, n_k, \cdots\rangle=\sqrt{n_k}\,|n_1, \cdots, n_k-1, \cdots\rangle \tag{23}$$

$$a_k{}^\dagger|n_1, \cdots, n_k, \cdots\rangle=\sqrt{n_k+1}\,|n_1, \cdots, n_k+1, \cdots\rangle \tag{24}$$

$$N_k=a_k{}^\dagger a_k, \qquad a_k a_k{}^\dagger=N_k+1 \tag{25}$$

$$[a_k, a_l{}^\dagger]=\delta_{kl}, \qquad [a_k, a_l]=[a_k{}^\dagger, a_l{}^\dagger]=0 \tag{26}$$

(25) から粒子の総数 N は

$$N\equiv\sum_k N_k=\sum_k a_k{}^\dagger a_k \tag{27}$$

で与えられる．仮定により N の固有値は有限である．また基底の任意の状態は，$|0\rangle$ に有限個の $a_k{}^\dagger$ を作用させてこしらえることができる．

Hermite 演算子

$$q_k\equiv(a_k+a_k{}^\dagger)/\sqrt{2}, \qquad p_k\equiv(a_k-a_k{}^\dagger)/\sqrt{2}\,i \tag{28}$$

を導入すると，(26) は

$$[q_k, p_l]=i\delta_{kl}, \qquad [q_k, q_l]=[p_k, p_l]=0 \tag{29}$$

と書き直せる．(29) が **1-4 e** で述べた正準交換関係と同じ形をしていることに注意する．このことはあとで正準形式の場の量子論を構成するとき，交換関係設定の基礎となるものである．

2-1 c　波動関数の導入　上述ではただ抽象的に自由度 k を導入して話をしたが，これでは k が何を意味するのか全くわからない．われわれの考えている粒子は個々に見れば量子力学的な対象であるはずだから，k とい

うのは1つの量子力学的な定常状態の名前であると考えられる．ところで **1-4 d** で述べたように，エネルギーの値 E_k を確定すると固有値問題は本来の意味では束縛状態しかでてこないので不便であるから，ひとまず時間のことは忘れて $t=0$ の場合だけを考えよう．また簡単のため自由度は空間に関するものだけで，内部自由度はないものとする．そうすると，状態 k の波動関数として $\varphi_k(\boldsymbol{x})$ をとってよい．ただし φ_k は

$$\int d^3x\,\varphi_k{}^*(\boldsymbol{x})\varphi_l(\boldsymbol{x})=\delta_{kl} \tag{30}$$

と規格化された直交関数であるとする．

1-2 f で述べたように，絶対値の2乗が積分可能な関数の全体は Hilbert 空間をはるので，そのような任意の関数 $f(\boldsymbol{x})$ はすべて $\varphi_k(\boldsymbol{x})$ の一次結合で表わせることを要請するのは自然であろう．つまり，つねに

$$f(\boldsymbol{x})=\sum_k c_k\varphi_k(\boldsymbol{x}) \tag{31}$$

のように書けると仮定する．そうすると (30) により

$$c_k=\int d^3x\,\varphi_k{}^*(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x}) \tag{32}$$

であるから，これを (31) に代入すれば，

$$f(\boldsymbol{x})=\int d^3y\sum_k\varphi_k(\boldsymbol{x})\varphi_k{}^*(\boldsymbol{y})f(\boldsymbol{y}) \tag{33}$$

を得る．$f(\boldsymbol{x})$ は任意であったから，

$$\sum_k\varphi_k(\boldsymbol{x})\varphi_k{}^*(\boldsymbol{y})=\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{34}$$

と書くことができる．ただし $\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$ は3次元の Dirac のデルタ関数 $\prod_{j=1}^{3}\delta(x_j-y_j)$ のことである．(34) のことを関数系 $\{\varphi_k(\boldsymbol{x})\}$ の *完全性 (completeness) といい，(30) と (34) を満たす関数系を *完全規格化直交系 (complete orthonormal set) という．Dirac のデルタ関数は Kronecker のデルタの連続変数の場合への拡張とみなせるので，(30) と (34) は非常に対称的であることに注意すべきである．

完全規格化直交系をなす $\{\varphi_k(\boldsymbol{x})\}$ を用いて Hermite 演算子

$$\phi(\boldsymbol{x})\equiv\sum_k[a_k\varphi_k(\boldsymbol{x})+a_k{}^\dagger\varphi_k{}^*(\boldsymbol{x})] \tag{35}$$

を作ってみると，$a_k{}^\dagger$, a_k がそれぞれ波動関数 $\varphi_k(\boldsymbol{x})$ で表わされる状態を生成消滅する演算子であることのイメージがよく表現される．実際，たとえば $\phi(\boldsymbol{x})$ を真空 $\langle 0|$ と1粒子状態 $a_k{}^\dagger|0\rangle$ とではさんでみると，

$$\langle 0|\phi(\boldsymbol{x})a_k{}^\dagger|0\rangle=\varphi_k(\boldsymbol{x}) \tag{36}$$

となることは明らかであろう．(35) のような演算子が場の演算子と呼ばれるものであるが，(35) はまだ時間 t を含んでいないので不完全なものである． t に関する依存性を決定するには，相対論的な場の方程式が必要である．

(36) よりもっと一般に，n 粒子の場合を考えると，

$$\langle 0|\phi(\boldsymbol{x}_1)\phi(\boldsymbol{x}_2)\cdots\phi(\boldsymbol{x}_n)a_{k_1}{}^\dagger a_{k_2}{}^\dagger\cdots a_{k_n}{}^\dagger|0\rangle$$
$$=\sum_{\rm sym}\varphi_{l_1}(\boldsymbol{x}_1)\varphi_{l_2}(\boldsymbol{x}_2)\cdots\varphi_{l_n}(\boldsymbol{x}_n) \tag{37}$$

となることがわかる（演習問題 2.2 参照）．ここに $(l_1, l_2, \cdots, l_n)$ は $(k_1, k_2, \cdots, k_n)$ を置換したもので*，和はあらゆる可能な $n!$ 個の置換についての和を表わす．(37) の右辺の波動関数は任意の 2 つの座標のいれかえに対し対称であるから，$\phi(\boldsymbol{x})$ は Bose 統計に従う粒子の場の演算子であることがわかる．

2-1 d フェルミオンの場合 今度は Fermi 統計に従う粒子の場合はどうなるかを考えてみよう．この場合は，Pauli の排他原理によって 2 つ以上の粒子が同じ状態を占めることは許されない．それゆえ，自由度のない場合は，状態は真空 $|0\rangle$ と 1 粒子状態 $|1\rangle$ との 2 つしか一次独立なベクトルがないことになる．したがって，演算子は 2 行 2 列の行列で表わされる．実際，消滅演算子 b，生成演算子 $b^\dagger$，個数演算子 N は

$$b=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\qquad b^\dagger=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} \tag{38}$$

$$N=b^\dagger b=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} \tag{39}$$

のように書き表わすことができる．(38) を使って $bb^\dagger$ を計算してみると，今度はこれは $N+1$ とはならずに

$$bb^\dagger=1-N \tag{40}$$

となる．それゆえ，(39) と (40) から N を消去するには $[b, b^\dagger]$ を考えたのでは具合が悪い．そこで 2 つの演算子 A, B に対する *反交換子 (anti-commutator)

$$\{A, B\}\equiv AB+BA \tag{41}$$

---

* もちろん $(k_1, k_2, \cdots, k_n)$ と $(l_1, l_2, \cdots, l_n)$ は $(1, 2, \cdots, n)$ の順序を並べかえたものである．置換とは k_j を l_j $(j=1, 2, \cdots, n)$ におきかえることで，$\begin{pmatrix}k_1 & k_2 \cdots k_n\\ l_1 & l_2 \cdots l_n\end{pmatrix}$ と記す．

を導入すると，(39)と(40)から

$$\{b, b^\dagger\}=1 \tag{42}$$

を得る．また

$$b^2=(b^\dagger)^2=0 \tag{43}$$

であるから，

$$\{b, b\}=\{b^\dagger, b^\dagger\}=0 \tag{44}$$

となる．

自由度のある場合は，消滅演算子，生成演算子，個数演算子はそれぞれ b_k, $b_k^\dagger$, $N_k^\dagger$ と書かれる．状態ベクトルはやはり(19)のように表わされるが，今度の場合は n_k は0または1だけをとる．$\sum_k n_k$ が有限であるような状態ベクトルによってはられる可分な Hilbert 空間は，やはり Fock 空間と呼ばれる．

$b_k, b_k^\dagger$ は(42),(44)を拡張した *反交換関係(anticommutation relation)

$$\{b_k, b_l^\dagger\}=\delta_{kl} \tag{45}$$

$$\{b_k, b_l\}=\{b_k^\dagger, b_l^\dagger\}=0 \tag{46}$$

を満足するものとする．$k \neq l$ に対しても反交換関係を要請していることに注意を要する．とくに(46)は

$$b_k b_l=-b_l b_k \tag{47}$$

を意味するから，$k \neq l$ のときも交換子は0にならない．(47)のような場合，b_k と b_l は *反可換(anticommutative)であるという．

$\{\varphi_k(\boldsymbol{x})\}$ を完全規格化直交系とし，(35)のときと同じように Hermite 演算子*

$$\psi(\boldsymbol{x})\equiv\sum_k[b_k\varphi_k(\boldsymbol{x})+b_k^\dagger\varphi_k(\boldsymbol{x})] \tag{48}$$

を考えると，(37)に相当する式は反交換関係のおかげで

$$\begin{aligned}&\langle 0|\psi(\boldsymbol{x}_1)\psi(\boldsymbol{x}_2)\cdots\psi(\boldsymbol{x}_n)b_{k_1}^\dagger b_{k_2}^\dagger\cdots b_{k_n}^\dagger|0\rangle\\&=(-1)^{n(n-1)/2}\sum_\sigma(\mathrm{sgn}\,\sigma)\varphi_{l_1}(\boldsymbol{x}_1)\varphi_{l_2}(\boldsymbol{x}_2)\cdots\varphi_{l_n}(\boldsymbol{x}_n)\end{aligned} \tag{49}$$

となる(演習問題2.2参照)．ただし σ は置換

$$\sigma\equiv\begin{pmatrix}k_1 & k_2 & \cdots & k_n\\ l_1 & l_2 & \cdots & l_n\end{pmatrix} \tag{50}$$

を表わし，$\mathrm{sgn}\,\sigma$ はそれが偶置換のとき $+1$，奇置換のとき -1 に等し

* 現実にはフェルミオンはすべて反粒子をもっているので，Hermite 演算子では表わされない．

い*. $\sum_\sigma$ は (37) のときと同様にすべての置換 σ についての和をとることを意味する. (49) の右辺はちょうど $\varphi_{l_j}(\boldsymbol{x}_k)$ を (j, k) 要素とする行列の行列式に等しい. たとえば,

$$\langle 0|\psi(\boldsymbol{x}_1)\psi(\boldsymbol{x}_2)b_2{}^\dagger b_1{}^\dagger|0\rangle=\varphi_1(\boldsymbol{x}_1)\varphi_2(\boldsymbol{x}_2)-\varphi_1(\boldsymbol{x}_2)\varphi_2(\boldsymbol{x}_1) \quad (51)$$

である. (49) からわかるように, 波動関数は 2 つの座標のいれかえに対しつねに反対称だから, たしかに Fermi 統計に従っている.

2-1 e　パラ統計　Fermi 統計と Bose 統計の中間の統計として理論上♦パラ統計というものが考えられる. すなわち, 同じ状態に p 個まで入ることは許すが $p+1$ 個は許さないという統計である. もっと正確にいうと, 相異なる状態に関し対称には何個でも許されるが反対称には p 個までというのが p 次の ♦para-Bose 統計, 反対称には何個でも許されるが対称には p 個までというのが p 次の ♦para-Fermi 統計である. 1 次の para-Bose 統計は Bose 統計, 1 次の para-Fermi 統計は Fermi 統計にほかならない. 強粒子の仮想基本粒子 quark は 3 次の para-Fermi 統計に従うものと考えられている.

一般のパラ統計の消滅演算子と生成演算子は交換関係とか反交換関係とかを満たし得ない. 一般的な関係は, これらの演算子の交換子または反交換子を 2 回組み合せたものが, これらの演算子の一次結合で書けるという形で与えられる. p 次の para-Fermi 統計に従う粒子は, 互いに全く区別のつかない p 個のフェルミオンの組に帰着することが知られている.

2-2　Poincaré 群の表現

前節で述べたように, 場の量子論的状態は個々の粒子の量子力学的状態と同時にそれらの粒子の個数をも指定したようなベクトルの重ね合せで表わされる. 本節では, これらの状態が相対論の要請に従ってどのように記述されるかを考察しよう. 本節の議論はすべて場の量子論で一般的に (すなわち相互作用があっても) 成立することである.

2-2 a　Poincaré 群　相対論の要請により, 理論は Lorentz 群 (正確

---

*　2 つの文字(または数字)をいれかえることを互換という. 任意の置換は互換のくり返しによって表わせる. その表わし方は一意的ではないが, 互換の数が偶数か奇数かは一定している. 偶数個の互換で表わされる置換を偶置換, 奇数個の互換で表わされる置換を奇置換という.

にいえば本義 Lorentz 群)に対して不変なように作られなければならない．それのみならず，もちろん理論は時間および空間の原点をどこにとるかということに無関係であるべきだから，その平行移動 $x_\mu{}'=x_\mu+a_\mu$ に対しても不変でなければならない．したがって，Lorentz 変換 $L=(l_\mu{}^\nu)$ と時間空間の平行移動 $a=(a_\mu)$ の任意の組み合せ (L, a) (L をしてから a をしたもの)に対しても理論は不変であるはずである．変換 (L, a) の全体は明らかに群をなす．これを ◆非斉次 Lorentz 群または ◆Poincaré (ポアンカレ)群と呼ぶ．(L', a') と (L, a) の積は，その意味するところから明らかなように

$$(L', a')(L, a)=(L'L, L'a+a') \tag{1}$$

のようになる．ただし $(L'a)_\mu\equiv l'_\mu{}^\nu a_\nu$ である．

Poincaré 群の generator はもちろん平行移動の generator と Lorentz 群の generator とから成る．平行移動の generator P^μ は無限小平行移動

$$(1, \varepsilon)=1-i\varepsilon_\mu P^\mu+O(\varepsilon^2) \tag{2}$$

によって定義されるが，任意の座標の関数 $f(x_\nu)$ に対し

$$f(x_\nu+\varepsilon_\nu)=f(x_\nu)+\varepsilon_\mu\partial^\mu f(x_\nu)+O(\varepsilon^2) \tag{3}$$

であるから，

$$P^\mu=+i\partial^\mu \tag{4}$$

と表示することができる．同様に，Lorentz 変換の generator $M^{\mu\nu}$ は，$l_\mu{}^\nu=g_\mu{}^\nu+\varepsilon_\mu{}^\nu$ と書いて $\varepsilon_\mu{}^\nu$ を無限小とするとき，

$$(L, 0)=1+\frac{1}{2}i\varepsilon_{\mu\nu}M^{\mu\nu}+O(\varepsilon^2) \tag{5}$$

によって定義される．Lorentz 変換の性質 $l_\mu{}^\rho g_{\rho\sigma}l_\nu{}^\sigma=g_{\mu\nu}$ により

$$\varepsilon_{\mu\nu}=-\varepsilon_{\nu\mu} \tag{6}$$

であるから，任意の関数を無限小 Lorentz 変換したものは

$$\begin{aligned} f(l_\rho{}^\sigma x_\sigma)&=f(x_\rho+\varepsilon_{\rho\sigma}x^\sigma) \\ &=f(x_\rho)+\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}(x^\nu\partial^\mu-x^\mu\partial^\nu)f(x_\rho)+O(\varepsilon^2) \end{aligned} \tag{7}$$

と展開でき，その generator は

$$M^{\mu\nu}=-M^{\nu\mu}=+i(x^\mu\partial^\nu-x^\nu\partial^\mu) \tag{8}$$

と表示される．

I-4 と比較すれば明らかなように，(4), (8) はそれぞれ運動量，角運動

量の4次元的拡張である．それゆえ，P^μ を *4次元運動量演算子，$M^{\mu\nu}$ を *4次元角運動量演算子と呼ぶ．$M^{\mu\nu}$ は反対称テンソルであるから，6つの独立な成分をもつ．これは Lorentz 群 $O(3,1)$ の次元が6であることから当然である．

(4) と (8) とから

$$[x^\mu, \partial^\nu] = -g^{\mu\nu} \tag{9}$$

を使って容易に計算できるように，P^μ と $M^{\mu\nu}$ は次の交換関係を満足する（演習問題2.3参照）．

$$[P^\mu, P^\nu] = 0 \tag{10}$$

$$[M^{\mu\nu}, P^\rho] = i(g^{\nu\rho}P^\mu - g^{\mu\rho}P^\nu) \tag{11}$$

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = -i(g^{\mu\rho}M^{\nu\sigma} - g^{\nu\rho}M^{\mu\sigma} + g^{\nu\sigma}M^{\mu\rho} - g^{\mu\sigma}M^{\nu\rho}) \tag{12}$$

とくに

$$M_{12} \equiv M_3, \qquad M_{23} \equiv M_1, \qquad M_{31} \equiv M_2 \tag{13}$$

とすると，(12) の空間成分は 1-4 の (27) を再現する．

すべての generator と可換な演算子は一般にその Lie 群の *Casimir（カシミール）演算子と呼ばれるが，Poincaré 群の Casimir 演算子は，P^2 と $W \equiv -w^2$ であることが知られている．ただし

$$w_\rho \equiv \frac{1}{2}\varepsilon_{\rho\sigma\mu\nu}P^\sigma M^{\mu\nu} \tag{14}$$

で，$\varepsilon_{\rho\sigma\mu\nu}$ の完全反対称性からすぐわかるように，w_ρ は P^μ と可換でかつ直交する．

2-2 b　Poincaré 群の表現　われわれが考えようとしている問題は，場の量子論的状態ベクトルが Poincaré 群に対してどのように変換するかである．それゆえ，(4) や (8) のような x_ν の関数に対する generator の表示式では不十分であって，Poincaré 群の generator を状態ベクトルの上に作用する演算子として表わさなければならない．すなわち，群論の言葉でいえば，Poincaré 群の Hilbert 空間の上での表現を求めなければならないのである．この表現はもちろんどういう場の量子論を考えるかによっていろいろと異なる形をとるであろう．しかしながら，いかに複雑な表現であっても，それが Poincaré 群の表現である以上，その generator は必ず交換関係 (10)～(12) を満足しなければならない．それゆえ，今後 P^μ と $M^{\mu\nu}$ は (10)～(12) を満足するような，状態ベクトルのはる Hilbert 空間の上の演算子としての Poincaré 群の generator を表わすものと定義し

直すことにする．

さて，一般の状態 $|\alpha\rangle$ は Poincaré 群に対して変換する．(L, a) だけ座標変換したとき，$|\alpha\rangle$ は $U(L, a)|\alpha\rangle$ に変換されるものとしよう．このとき $U(L, a)$ の全体は Poincaré 群の表現を与える．$U(1, a)$ の generator は P^μ, $U(L, 0)$ の generator は $M^{\mu\nu}$ である．P^μ が互いに可換だから，$U(1, a)$ は

$$U(1, a)=\exp(-ia_\mu P^\mu) \tag{15}$$

と書ける．

$|\alpha\rangle$ と $U(L, a)|\alpha\rangle$ とは同じものを別の座標系から眺めただけであるから，ノルムは変化しないはずである．ゆえに

$$\langle\alpha|\alpha\rangle=\langle\alpha|U^\dagger(L, a)U(L, a)|\alpha\rangle \tag{16}$$

でなければならない．$|\alpha\rangle$ は任意でかつ $U(L, a)$ の逆変換 $U^{-1}(L, a)$ はもちろん存在するから，(16) と 1-2 d, f に与えた定理により $U(L, a)$ は unitary であることがわかる．したがってまた，generator P^μ と $M^{\mu\nu}$ は Hermite でなければならない．

2-2 c little group 上で見たように，状態ベクトルは Poincaré 群の unitary 表現に従って変換する．それゆえ，Poincaré 群の unitary 表現を求めることが重要であるが，幸いなことに unitary 表現は完全可約であるから，既約表現だけを求めれば十分である．

Poincaré 群は平行移動の全体という可換群を含むことに注意する．可換群の既約表現は1次元だから極めて容易に求まる．実際，P^μ の固有値 p^μ に属する固有状態を $|p\rangle$ と書くと，(15) から明らかなように，

$$U(1, a)|p\rangle=\exp(-ip^\mu a_\mu)|p\rangle \tag{17}$$

である．それゆえ，Poincaré 群の既約表現を作ろうとすれば，すでに決まっている平行移動の表現 $\exp(-ip^\mu a_\mu)$ を Lorentz 変換によってこわさないようにしなくてはならない．つまり p_μ を動かすような Lorentz 変換に対しては，もはやこの表現では変換が許されない．表現で変換することが許される Lorentz 変換は p_μ を動かさないものだけである．p_μ を動かさない，すなわち $l_\mu{}^\nu p_\nu=p_\mu$ であるような Lorentz 変換 $L=(l_\mu{}^\nu)$ の全体は Lorentz 群の部分群をなす．この群を p_μ に属する Wigner（ウィグナー）の little group という．

このようにして，Poincaré 群の既約表現は，$\exp(-ip^\mu a_\mu)$ と p_μ に属する little group の既約表現の積として書き表わされることがわかる．

定義から明らかなように，little group は p_μ に依存する．しかし，Lorentz 変換によって移れる p_μ 同士では little group の群としての構造は同じ(群論の言葉でいえば同型)になるので，結局実際上区別しなければならないのは，p_μ が時間的の場合，光錐的の場合，空間的の場合，それに $p_\mu=0$ の場合の 4 通りである．このそれぞれに対して little group は次のようになる．

1． p_μ が時間的 ($p^2>0$) のとき $O(3)$
2． p_μ が光錐的 ($p^2=0$, $p_\mu\neq0$) のとき $E(2)$
3． p_μ が空間的 ($p^2<0$) のとき $O(2, 1)$
4． $p_\mu=0$ のとき $O(3, 1)$

ここで $E(2)$ は 2 次元の Euclid 群，すなわち平面上の平行移動と回転から成る群を表わす．

p_μ が時間的の場合，$p_0\neq0$, $p_k=0$ ととれば，little group は時間成分を動かさない Lorentz 変換の全体だから，空間回転だけであることは明らかである．同様に p_μ が空間的の場合は，$p_0=p_1=p_2=0$, $p_3\neq0$ とすれば，little group は空間第 3 軸方向だけを動かさない Lorentz 変換の全体だから $O(2, 1)$ になる．$p_\mu=0$ のときは，全く制約がないのと同じだから，Lorentz 変換全体であることは自明であろう．p_μ が光錐的のとき，little group が $E(2)$ になることの証明はあまり直観的にはいかないので省略する*．

2-2 d エネルギーの正値性 相対論では時間と空間，エネルギーと運動量をそれぞれ対等にとり扱うけれども，それらが全く同様な性質をもつというわけではない．空間には特定の方向性はないが，時間は明白な方向性をもつ．それに対応して，運動量は任意の実数値をとるが，エネルギーは質量エネルギーまで勘定に入れれば負の値になることは決してない．エネルギーの正値性は，この世の準安定性を保証するもので，もしこれがなければ完全に混沌の世界になるであろう．それゆえ，場の量子論では通常エネルギーの正値性を最初から要請する．すなわち，P_0 の固有値 p_0 は正または 0 であるとする．

$p_0\geqq0$ という要請が相対論の要請すなわち本義 Lorentz 変換に対する

---

* w_ρ は P^μ と可換だから，w_ρ の式 (14) で P^σ にその固有値 p^σ ($\neq0$) を代入して得られる演算子の一次独立なものは，little group の generator となる．それゆえそれらの交換関係を調べれば little group の構造がわかる．

不変性と矛盾しないためには，p_μ が空間的であることは許されない．p_μ として許されるのは，$\{p^2>0,\ p_0>0\}$，$\{p^2=0,\ p_0>0\}$，$\{p_\mu=0\}$ の3通りに限られることになる．このうち第3の場合は，P_μ の固有値が0なのだから何もない状態，すなわち真空 $|\mathbf{0}\rangle$ に対応するものと考えられる*．$|\mathbf{0}\rangle$ は $O(3,1)$ の恒等表現に属するものとすると，

$$P_\mu|\mathbf{0}\rangle=0 \tag{18}$$

$$M_{\mu\nu}|\mathbf{0}\rangle=0 \tag{19}$$

となる．通常(18)を満たす状態は $|\mathbf{0}\rangle$ ただ1つであると仮定する．

2-2 e little group の表現 第1，第2の場合は，$p_0>0$ だから少なくとも1個の素粒子が存在する状態であると考えられる．安定粒子が1個という概念は明らかに Poincaré 群に対し不変な概念であるから，以下1個の素粒子の状態の言葉で説明しよう．

$\{p^2>0,\ p_0>0\}$ の場合は，$p^2=m^2$ とおくと m はその粒子の質量にほかならない．また little group $O(3)$ の既約表現は，非相対論的量子力学でよく知っている角運動量の表現である．すなわち，既約表現は $\boldsymbol{M}^2$ の固有値 $s(s+1)$ $(s=0,\ 1/2,\ 1,\ 3/2,\ \cdots)$ によって定まる $2s+1$ 次元表現である．s はこの粒子のスピンにほかならない．$\boldsymbol{p}=0$ の系で考えると，(14)で定義された w_ρ は(13)の記法で $w_0=0,\ w_l=mM_l$ となり，$\boldsymbol{M}^2\equiv\sum_l M_l^2$ は Casimir 演算子 W を m^2 で割ったものに一致することがわかる．

$\{p^2=0,\ p_0>0\}$ の場合は，p^2 に関しては上の場合の $m=0$ のときに相当するから，質量0の粒子を表わす．しかし little group はもはや $O(3)$ ではないから同じようには扱えない．$E(2)$ は再び平行移動を含むので，Poincaré 群の little group を考えたときと同じ手法が使える．$E(2)$ の平行移動(時空間の平行移動とはもちろん異なる)に関して実際に変換するような既約表現は，スピンが連続固有値になるので物理的意味はないと考えられている．平行移動の恒等表現の場合は，$E(2)$ はもちろん $O(2)$ に帰着する．$O(2)$ の generator は $p_1=p_2=0,\ p_3=p_0\neq0$ のとき角運動量の第3成分 M_3 にほかならないから**，その固有値 s は，0, ±1/2, ±1, $\cdots$

* $|\mathbf{0}\rangle$ に太字の $\mathbf{0}$ を用いたのは，相互作用のある場合にも適用する真空を意味する．これに対し $|0\rangle$ は相互作用のない場合にしか意味をもたない真空を表わすものとする．したがって $|\mathbf{0}\rangle$ についての記述が途中から $|0\rangle$ に変わる場合はあるが，逆はない．

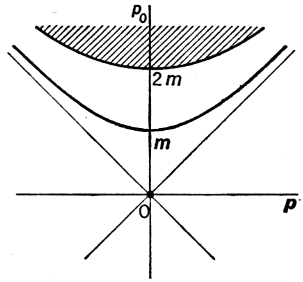
** 正しくいえば w_0/p_0 すなわち $\boldsymbol{M}$ の運動量方向の成分で，♦helicity と呼ばれる量である．これは空間反転に対し符号をかえる．

である．質量0の粒子の場合は，$|s|$ をスピンと呼んでいる．$|s|\neq 0$ の場合，質量0の粒子はつねにただ2つの独立な方向の偏極(円偏光) $s=\pm|s|$ しかもたないことがわかる*．電磁波が2方向のヨコ波のみをもち，タテ波をもたないのは，光子の質量が0だからである．

2-2 f スペクトル条件 P_μ の固有値 p_μ のとりうる値の範囲をスペクトル(spectrum)，それを規定することを◆スペクトル条件(spectral condition)という．もしただ1種類の粒子しかないものとすれば，その粒子の質量を m とするとき，1粒子状態のスペクトルは

$$p^2=m^2, \quad p_0>0 \qquad (20)$$

の点全体だから，2葉超双曲面の $p_0>0$ 側の1葉となる．n 粒子系 ($n\geqq 2$) のときは，$(p_j)_0=\sqrt{m^2+\boldsymbol{p}_j{}^2}$ ($j=1, \cdots, n$) の条件の下で $p_\mu\equiv\sum_{j=1}^{n}(p_j)_\mu$ のとりうる範囲を考えればよい．これは簡単な計算ですぐ



2·1 図

$$p^2\geqq(nm)^2, \quad p_0>0 \qquad (21)$$

であることがわかる(演習問題2.4参照)．したがってスペクトル条件としては $n=2$ の場合だけですでに十分である．真空 $p_\mu=0$ をも考慮すると質量 m の1種類の粒子の理論のスペクトルは 2·1 図のようになる**．もちろん $m=0$ ならば前方光錐内部の空隙はなくなってしまう．

2種類以上の粒子のあるときも同様にやれる．1粒子系のスペクトルはそれぞれのもののたんなる合併になる．多粒子系のスペクトルは最小質量の粒子の2粒子系で決まる．量子数ごとに区別するとスペクトル条件はもう少し複雑になる．

なお余談になるが，最近 p_μ が空間的な場合に相当する粒子の存在を想定し，◆超光速粒子あるいは◆タキオン(tachyon)と呼んでいる人があることを付言しておこう．上で説明したように，タキオンをエネルギーの正値性と相対論的不変性とに矛盾せぬように導入することは難しい．実際，タキオンの満足な場の量子論は作れない***．

---

* 空間反転の不変性がなければ $\pm|s|$ の両方を組にする必要もなくなる．実際中性微子は左偏極だけの粒子と考えられている．

** 複合粒子は別の粒子とみなす．

*** タキオンの理論を革命的新理論のように錯覚してはならない．

2-3 場の演算子

場の量子論の中心的存在はもちろん場の演算子 (field operator) である．これは 2-1 で述べた例に見られるように，座標の関数 (正しくは超関数) であると同時に状態ベクトルの上の演算子でもあるようなものである．

2-3 a　場の演算子の変換性　相対論的共変性の要請から，場の演算子は 4 次元ベクトル x_μ の関数でなくてはならない．それを一般的に $\varphi(x)$ と書くことにしよう (関数記号内の 4 次元ベクトル変数の添字は今後省略する)．$\varphi(x)$ は一般に何個かの成分をもつようなものである．

$\varphi(x)$ の Poincaré 群に対する変換性は，状態ベクトルの方の変換性と相対的に決まるものである．一番わかりやすいのは，Poincaré 群に対して固定された基準ベクトルの上で考察すること，つまり Heisenberg 表示で考えることである．前節で述べたように，一般のベクトル $|\alpha\rangle$ は変換 (L, a) に対して $U(L, a)|\alpha\rangle$ に変換されるから，$U^{-1}(L, a)$ を作用させれば Heisenberg 表示に移れる．したがって，Heisenberg 表示では $\varphi(x)$ は変換 (L, a) に対し

$$\varphi'(x) \equiv U^{-1}(L, a)\varphi(x)U(L, a) = \Lambda(L, a)\varphi(Lx+a) \qquad (1)$$

のように変換する．ここに $\Lambda(L, a)$ は $\varphi(x)$ の成分間の変換を表わす行列で，Poincaré 群の有限次元の表現になっていなければならない．

場の演算子は粒子を生成したり消滅させたりする能力のある場である．いいかえれば，それは Minkowski 空間の各点 x_μ の能力を表わしているものである．つまり，外場のようにわれわれ人間が勝手に調節できるものとは全く異なり，時空間それ自身のもつ性質の記述にほかならない．それゆえ，Minkowski 空間の均質性を反映して，平行移動にさいしては場の演算子そのものは変化しないと仮定する．式で書くと $\Lambda(1, a)=1$，すなわち (1) から

$$\varphi(x+a) = U^{-1}(1, a)\varphi(x)U(1, a) \qquad (2)$$

であるものと仮定する．あるいは同じことであるが，(2) において $x_\mu=0$ とおき a_μ の代りに x_μ と書くと，

$$\varphi(x) = U^{-1}(1, x)\varphi(0)U(1, x) \qquad (3)$$

であるから，$\varphi(0)$ が与えられているときは $\varphi(x)$ が (3) によって定義さ

れると考えてもよい．(2)の無限小の場合を考えれば，2-2の(15)により

$$i\partial^\mu\varphi(x)=[\varphi(x),\ P^\mu] \tag{4}$$

を得る．これは Heisenberg 方程式 1-4 の(26)の拡張である．

(2)のように $\varphi(x)$ は平行移動に対し本質的に恒等表現であるから，little group は Lorentz 群それ自身になる．$U(L,0)\equiv U(L)$ と書くと，(1)は

$$\varphi'(x)=\Lambda(L)\varphi(Lx)=U^{-1}(L)\varphi(x)U(L) \tag{5}$$

となる．ここに $\Lambda(L)$ は $\Lambda(L,0)$ の略記で，Lorentz 群の表現(通常の場合既約表現)になっている．しかも，空間の等方性の反映として，それは x_μ や ∂_ν を含まないような行列でなければならない．(5)を無限小変換の場合について書けば，

$$[i(x^\mu\partial^\nu-x^\nu\partial^\mu)+s^{\mu\nu}]\varphi(x)=[\varphi(x),\ M^{\mu\nu}] \tag{6}$$

となる．ただし $s^{\mu\nu}$ は $\Lambda(L)$ の generator，すなわち $\boldsymbol{l}_\mu{}^\nu=\boldsymbol{g}_\mu{}^\nu+\varepsilon_\mu{}^\nu$ のとき

$$\Lambda(L)=1+\frac{1}{2}i\varepsilon_{\mu\nu}s^{\mu\nu}+O(\varepsilon^2) \tag{7}$$

で，$M^{\mu\nu}$ の交換関係 2-2 の(12)と全く同じ交換関係を満足する．(6)の左辺の角括弧内は 1-4 の(31)の相対論的拡張になっている．

1-2 e で述べたように，Lorentz 群 $O(3,1)$ の Lie 環は $SL(2,\boldsymbol{C})$ の Lie 環と同じである．したがって，$SL(2,\boldsymbol{C})$ の既約表現を調べればよい．この解析は♦スピノル解析(spinor analysis)と呼ばれるが，本書ではたち入らないことにする．

2-3 b　局所可換性　相対論によればいかなる作用も光速度より速く伝播することはできない．それゆえ $x_\mu-y_\mu$ が空間的である場合，2点 x_μ と y_μ における事象は互いに他に影響することができない．これを♦Einstein 因果律という．場の量子論では Einstein 因果律は次の形で表現される：

$$[\varphi(x),\ \varphi(y)]=0 \qquad ((x-y)^2<0\ \text{のとき}) \tag{8}$$

(8)は x_μ 点における粒子の生成消滅と y_μ 点における生成消滅とが，$(x-y)^2<0$ ならば互いに他に影響を与えることなしに起こることを表わしている．(8)を♦微視的因果律(micro-causality)または♦局所可換性(local commutativity あるいは locality)という．

局所可換性は観測の問題と関係がある．$\varphi(x)$ 自身が観測可能量であれば，Einstein 因果律は(8)のようになるだろうが，直接観測可能な量でなければ必ずしも(8)の形でなくても古典的な Einstein 因果律とは矛盾

しない．実際局所可換性が成立するのは，少なくとも一方がボゾン場の場合で，フェルミオン場同士の場合には，その統計と矛盾しないためには交換関係の代りに反交換関係をとらなければならない．後者の場合 •局所反可換という．パラ統計の粒子の場合は問題がもっとややこしくなる．

Einstein 因果律を局所可換性のようにミクロなスケールにまで要求するのは強すぎるという反論もある．しかしながら，Lorentz 不変性をミクロなスケールで要求しておいて Einstein 因果律だけをミクロで破りマクロで保とうとするのは非常に無理な相談である．実際そのような試みはうまくいかない．

局所可換性は，場の演算子を支配する極めて強い統制原理を与える．前節と本節で述べた場の量子論の基本的要請をまとめると，

1. Hilbert 空間の計量の正定値性
2. Lorentz 不変性
3. 局所可換性
4. スペクトル条件（真空の一意性を含む）

の 4 つであるが，これらは公理論的場の理論の出発点でもある．これにあと少し技術的な仮定をつけ加えると，遷移振幅の解析性その他の重要な性質が導かれるのである．とくに分散公式の成立は，主として局所可換性に基づくものと考えられる．

2-3 c 自由場の方程式 $\varphi(x)$ は一般に偏微分方程式を満足する．その形は P_μ が与えられていれば，Heisenberg 方程式 (4) を計算すればわかるはずである．

$\varphi(x)$ がどんな方程式を満たすかを見るために，まず $\varphi(x)|\mathbf{0}\rangle$ を調べてみよう．真空 $|\mathbf{0}\rangle$ は時空間の平行移動に対して不変だから，(3) を使うと

$$\varphi(x)|\mathbf{0}\rangle = U^{-1}(1, x)\varphi(0)|\mathbf{0}\rangle \tag{9}$$

となる．

$\varphi(0)|\mathbf{0}\rangle$ は一般には複雑な状態なので，とくに相互作用が全くないような仮想的な場合を考えてみよう．この場合の $\varphi(x)$ を •自由場(free field) という．自由場 $\varphi(x)$ は，2-1 で考えたような消滅演算子と生成演算子の一次結合で書けるものである．したがって，$\varphi(0)|\mathbf{0}\rangle$ は 1 粒子状態の重ね合せである*．1 粒子状態の平行移動に対する変換性は，2-2 c で述べた

* 自由場を考えたことに対応して $|\mathbf{0}\rangle$ を $|0\rangle$ と書き改めた．

ように，4次元運動量が p_μ の場合 $\exp(-ip^\mu x_\mu)$ であったから，(9)は結局 $\exp(+ip^\mu x_\mu)$ の重ね合せのように振る舞うはずである．ここで $\varphi(x)$ は質量 m をもつ粒子の場とすると，p^μ はすべて

$$p^2=m^2, \qquad p_0>0 \tag{10}$$

を満たすから，(9)により

$$(\Box+m^2)\varphi(x)|0\rangle=0 \tag{11}$$

である．

ところで，一般に $j(x)$ が局所可換性を満たす演算子でかつ $j(x)|0\rangle=0$ であると $j(x)=0$ でなければならないことが証明される*．それゆえ，自由場 $\varphi(x)$ は一般に

$$(\Box+m^2)\varphi(x)=0 \tag{12}$$

を満足する．(12)を ♦Klein(クライン)-Gordon(ゴルドン)の方程式という．この式は粒子のスピンに無関係に成立する(ただし Hilbert 空間の計量の正定値性を用いていることに注意しなければならない)．

2-4　自由スカラー場

前節まで場の量子論の一般的な枠組について述べてきたが，これらはあくまで枠組であって具体的な理論ではない．本節と次節では，場の量子論の最も簡単な場合である自由場の理論を論ずる．自由場というものはもちろん非現実的なものであるが，相互作用を導入した場合の理論を論ずるさいの基礎となるばかりでなく，自由場を介してはじめて散乱問題などの物理的解釈が可能になるのである．

本節ではスピン0の場を扱う．スピン0の場は，空間反転に対し符号を変えないとき ♦スカラー場(scalar field)，符号を変えるとき ♦擬スカラー場(pseudoscalar field)と呼ぶ．しかしながら，自由場に関する限り両者の理論は全く区別ができないので，スカラー場という言葉で代表することにする．

---

*　この証明は，公理論的場の理論の知識が必要なので省略する．証明の方針は次の通りである．$j(x)$ と任意個数の場の演算子との積の真空期待値(2-8 a 参照)を考えると，局所可換性のおかげで順序だけ異なるものは同一の多変数解析関数の異なる境界値であることがいえる．したがって $j(x)|0\rangle=0$ と解析接続の一意性を使うとこれらはすべて0であることがわかる．これから $j(x)$ のすべての行列要素が0であることが示される．

古典力学の Hamilton の正準形式をまねて構成した場の量子論を ♦正準形式の場の量子論という．正準形式を用いるといろいろの問題を見通しよく扱うことができる．たとえば，状態ベクトルの空間を不定計量の Hilbert 空間に拡張するさいにも，正準形式が理論構成の指導原理となる．以下正準形式の自由スカラー場の理論を述べる．

2-4 a Lagrange 形式* 出発点はまず ♦Lagrangian（ラグランジアン）** であるが，古典力学での Lagrangian は場の量の関数を空間積分したものであるから，Lorentz 変換に対して不変な量ではない．それゆえ，場の量子論では，Lagrangian 自身よりもその被積分関数の方が基本的な量となる．これを ♦Lagrangian 密度と呼ぶ．Lagrangian 密度は，本義 Lorentz 変換に対しスカラーであるような Hermite 演算子であるとする．

質量 μ の自由な中性スカラー場 $\phi(x)$ の Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L}(x)\equiv\frac{1}{2}\left[\partial^\mu\phi(x)\cdot\partial_\mu\phi(x)-\mu^2\phi^2(x)\right] \qquad (1)$$

で与えられることが知られている．ただし ♦中性 (neutral) というのは，$\phi(x)$ が Hermite であることを意味する．作用積分は

$$S\equiv\int d^4x\,\mathcal{L}(x) \qquad (2)$$

で与えられる．ここに積分領域はたとえば全時空間であると思っておく．(2) と (1) から，スカラー場 $\phi(x)$ の次元は $[L^{-1}]$ であることがわかる．

$\phi(x)$ に対して c 数の変分 $\delta\phi(x)$ を考え，変分原理

$$\delta S=0 \qquad (3)$$

を (1) を使って書くと

$$\int d^4x\left[\partial^\mu\phi(x)\cdot\partial_\mu\delta\phi(x)-\mu^2\phi(x)\delta\phi(x)\right]=0 \qquad (4)$$

となる．$\delta\phi(x)$ は無限遠では 0 と仮定し，部分積分すると，(4) が任意の $\delta\phi(x)$ について成立するためには

$$(\Box+\mu^2)\phi(x)=0 \qquad (5)$$

でなければならないことがわかる．すなわち，$\phi(x)$ はたしかに質量 μ の Klein-Gordon 方程式を満足する．

2-4 b 正準量子化 正準形式の場の量子論では，$\phi(x)$ をパラメーター

---

* Lagrange 形式および正準量子化の一般論は，付録参照．

** Lagrangean とも書く．

$\boldsymbol{x}$ を含んだ正準変数と考える．その正準共役量 $\pi(x)$ は $\partial_0\phi(x)\equiv\dot{\phi}(x)$ と書くとき，

$$\pi(x)\equiv\partial\mathcal{L}(x)/\partial\dot{\phi}(x) \tag{6}$$

で定義される．いまの場合 (1) により

$$\pi(x)=\dot{\phi}(x) \tag{7}$$

であるから，Hamiltonian H は

$$\begin{aligned} H&\equiv\int d^3x[\pi(x)\dot{\phi}(x)-\mathcal{L}(x)] \\ &=\frac{1}{2}\int d^3x\{\pi^2(x)+\sum_k[\partial_k\phi(x)]^2+\mu^2\phi^2(x)\} \end{aligned} \tag{8}$$

で与えられる．H の被積分関数を ♦Hamiltonian 密度と呼び $\mathcal{H}(x)$ で表わす．量子力学における正準交換関係 1-4 の (24)，(25) の類推から，$\phi(x)$ と $\pi(x)$ の間に次の ♦正準交換関係を設定する．

$$[\phi(x_0, \boldsymbol{x}),\ \pi(x_0, \boldsymbol{y})]=i\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{9}$$

$$[\phi(x_0, \boldsymbol{x}),\ \phi(x_0, \boldsymbol{y})]=[\pi(x_0, \boldsymbol{x}),\ \pi(x_0, \boldsymbol{y})]=0 \tag{10}$$

量子力学のときの添字 j, k に対応するものがパラメーター $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ であるから，(9) では Kronecker のデルタの代りに右辺に 3 次元のデルタ関数が現われている．(9)，(10) のような同時刻の交換関係を導入することを ♦正準量子化 (canonical quantization) という．

$\phi(x)$ と $\pi(x)$ に対する Heisenberg 方程式はそれぞれ

$$i\partial_0\phi(x)=[\phi(x), H] \tag{11}$$

$$i\partial_0\pi(x)=[\pi(x), H] \tag{12}$$

である．(11)，(12) の右辺の H に (8) を代入し，(9)，(10) を用いて計算するとそれぞれ

$$\partial_0\phi(x)=\pi(x) \tag{13}$$

$$\partial_0\pi(x)=(\Delta-\mu^2)\phi(x) \tag{14}$$

となる．(13) は (7) と同一の式であり，(14) は (13) を代入すると自由場の方程式 (5) にほかならない．このように正準量子化は変分原理と矛盾しない．

2-4 c Poincaré 群の generator $\Theta^{00}(x)=\mathcal{H}(x)$ となるように ♦エネルギー運動量テンソル密度 $\Theta^{\mu\nu}(x)$ を

$$\Theta^{\mu\nu}(x)\equiv\frac{1}{2}\{\partial^\mu\phi(x),\ \partial^\nu\phi(x)\}-g^{\mu\nu}\mathcal{L}(x) \tag{15}$$

によって定義する．第 1 項は $\partial^0\phi$ と $\partial^k\phi$ とが可換でないため対称化して

ある．$\Theta^{\mu\nu}(x)$ はもちろん Hermite で対称テンソルである．すなわち

$$\Theta^{\mu\nu}(x)=\Theta^{\nu\mu}(x) \tag{16}$$

また (1) を (15) に代入して (5) を用いると

$$\partial_\nu \Theta^{\mu\nu}(x)=0 \tag{17}$$

であることがわかる．

$\Theta^{\mu\nu}(x)$ を用いると，Poincaré 群の generator は次のように定義することができる．

$$P^\mu \equiv \int d^3x\, \Theta^{\mu 0}(x) \tag{18}$$

$$M^{\mu\nu} \equiv \int d^3x [x^\mu \Theta^{\nu 0}(x) - x^\nu \Theta^{\mu 0}(x)] \tag{19}$$

とくに $P^0=H$ である．

(18), (19) の右辺は見かけ上 x_0 に依存するが，

$$\partial_0 P^\mu=0, \qquad \partial_0 M^{\mu\nu}=0 \tag{20}$$

が成立することは，(17) を用いてから部分積分することによって確かめられる．ただし $\Theta^{\mu\nu}(x)$ は空間遠方では 0 になるものとする．たとえば，(20) の第 2 式の証明は次の通りである．

$$\begin{aligned}\partial_0 M^{\mu\nu} &= \int d^3x [g_0{}^\mu \Theta^{\nu 0} + x^\mu \partial_0 \Theta^{\nu 0} - (\mu \leftrightarrow \nu)] \\ &= \int d^3x [g_0{}^\mu \Theta^{\nu 0} + \sum_k (-g_k{}^\mu) \Theta^\nu{}_k - (\mu \leftrightarrow \nu)] \\ &= \int d^3x [\Theta^{\nu\mu} - (\mu \leftrightarrow \nu)] = 0 \end{aligned} \tag{21}$$

(21) で $(\mu \leftrightarrow \nu)$ はその前のすべての項の μ と ν を入れかえたものを表わす．

(18) と (19) で定義された P^μ と $M^{\mu\nu}$ は，正準交換関係 (9), (10) を用いると，たしかに 2-2 の (10)～(12) を満たすことが確かめられる．ただ計算は少し面倒である．

2-4 d　運動量表示　正準交換関係 (9), (10) を満足する $\phi(x)$ と $\pi(y)$ が 2-1 で考えた生成消滅演算子をどのように再現するかを考察しよう．今度は時間も考慮しているので，波動関数として Klein-Gordon 方程式 (5) の解をとらねばならない．その場合一番簡単な解は，遠方で 0 にならないのが少し困るけれども，平面波の解

$$\varphi(x, p) \equiv (2\pi)^{-3/2} \exp(-ip^\mu x_\mu) \tag{22}$$

である．ただし $p_0 = \pm \omega_p$,

$$\omega_{\boldsymbol{p}} \equiv \sqrt{\mu^2+\boldsymbol{p}^2} \tag{23}$$

である．2-2 d で要請したように，エネルギー p_0 は正でないと困るから $p_0=\omega_{\boldsymbol{p}}$ の平面波だけをとる*．そうするとそれらの全体は，Fourier 変換の公式からわかるように，次の意味で完全規格化直交系をなす．

$$\int d^3x\, \varphi^*(x, q)\varphi(x, p)=\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}) \tag{24}$$

$$\int d^3p\, \varphi(x, p)\varphi^*(y, p)=\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \quad (\text{ただし } x_0=y_0) \tag{25}$$

2-1 の (35) と同じように考えると，$\phi(x)$ の展開は

$$\phi(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3p\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\boldsymbol{p}}}}[a(\boldsymbol{p})e^{-ipx}+a^\dagger(\boldsymbol{p})e^{+ipx}] \tag{26}$$

のようになる．ただし $p_0=\omega_{\boldsymbol{p}}$, $px=p^\mu x_\mu$ である．自由度 k が今度の場合は運動量 $\boldsymbol{p}$ という連続変数になったので，k についての和が $\boldsymbol{p}$ の積分におきかわっている．$1/\sqrt{2\omega_{\boldsymbol{p}}}$ という因子は，あとで $a(\boldsymbol{p})$, $a^\dagger(\boldsymbol{p})$ の満たす交換関係がきれいな形になるようにするためにいれてある．(26) を 2 つに分けて，その第 1 項を $\phi(x)$ の ♦正エネルギー部分(positive frequency part)，第 2 項を $\phi(x)$ の ♦負エネルギー部分(negative frequency part) といい，それぞれ $\phi^{(+)}(x)$, $\phi^{(-)}(x)$ で表わす．

(26) を x_0 で微分すると

$$\pi(x)=\partial_0\phi(x)=\frac{-i}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3p\sqrt{\frac{\omega_{\boldsymbol{p}}}{2}}[a(\boldsymbol{p})e^{-ipx}-a^\dagger(\boldsymbol{p})e^{+ipx}] \tag{27}$$

を得る．$x_0=0$ とおいて，(26), (27) の Fourier 逆変換をとると，

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3x\, e^{-ipx}\phi(0, \boldsymbol{x})=\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\boldsymbol{p}}}}[a(\boldsymbol{p})+a^\dagger(-\boldsymbol{p})] \tag{28}$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3x\, e^{-ipx}\pi(0, \boldsymbol{x})=-i\sqrt{\frac{\omega_{\boldsymbol{p}}}{2}}[a(\boldsymbol{p})-a^\dagger(-\boldsymbol{p})] \tag{29}$$

であるから，これを $a(\boldsymbol{p})$ と $a^\dagger(-\boldsymbol{p})$ について解けば，

$$a(\boldsymbol{p})=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\boldsymbol{p}}}}\int d^3x\, e^{-ipx}[\omega_{\boldsymbol{p}}\phi(0, \boldsymbol{x})+i\pi(0, \boldsymbol{x})] \tag{30}$$

$$a^\dagger(\boldsymbol{p})=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\boldsymbol{p}}}}\int d^3x\, e^{+ipx}[\omega_{\boldsymbol{p}}\phi(0, \boldsymbol{x})-i\pi(0, \boldsymbol{x})] \tag{31}$$

を得る．そこで正準交換関係 (9), (10) を用いると，交換関係

$$[a(\boldsymbol{p}),\ a^\dagger(\boldsymbol{q})]=\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}) \tag{32}$$

---

* エネルギーが $-\omega_{\boldsymbol{p}}$ の粒子を消滅させることは，エネルギーが $+\omega_{\boldsymbol{p}}$ の粒子を生成することであると読みかえるので，負エネルギーの解も捨てたわけではない．

$$[a(\boldsymbol{p}),\ a(\boldsymbol{q})]=[a^\dagger(\boldsymbol{p}),\ a^\dagger(\boldsymbol{q})]=0 \tag{33}$$

が求まる．逆に (32), (33) を用いると，(26), (27) が (9), (10) を満たすことはすぐに確かめられる．

(32), (33) は予想通り 2-1 の (26) を連続変数に拡張したものになっているから，$a(\boldsymbol{p})$ を運動量 $\boldsymbol{p}$ の粒子の消滅演算子，$a^\dagger(\boldsymbol{p})$ を運動量 $\boldsymbol{p}$ の粒子の生成演算子と解釈することができる．実際，もし $\{f_k(\boldsymbol{p})\}$ が運動量空間における完全規格化直交系ならば

$$a_k\equiv\int d^3p f_k(\boldsymbol{p})a(\boldsymbol{p}) \tag{34}$$

のようにおけば，2-1 の (26) が得られる．したがって，真空 $|0\rangle$ は

$$a(\boldsymbol{p})|0\rangle=0 \tag{35}$$

によって定義される．

2-4 e Poincaré 群の generator の運動量表示 (26), (27) を用いて P^μ, $M^{\mu\nu}$ の運動量表示を計算しよう．まず

$$\int d^3x\,\pi^2(x)=\int d^3p\frac{\omega_{\boldsymbol{p}}}{2}[-a(\boldsymbol{p})a(-\boldsymbol{p})+a(\boldsymbol{p})a^\dagger(\boldsymbol{p})$$
$$+a^\dagger(\boldsymbol{p})a(\boldsymbol{p})-a^\dagger(\boldsymbol{p})a^\dagger(-\boldsymbol{p})] \tag{36}$$

$$\int d^3x[\partial_k\phi(x)]^2=\int d^3p\frac{p_k{}^2}{2\omega_{\boldsymbol{p}}}[a(\boldsymbol{p})a(-\boldsymbol{p})+a(\boldsymbol{p})a^\dagger(\boldsymbol{p})$$
$$+a^\dagger(\boldsymbol{p})a(\boldsymbol{p})+a^\dagger(\boldsymbol{p})a^\dagger(-\boldsymbol{p})] \tag{37}$$

$$\int d^3x\,\phi^2(x)=\int d^3p\frac{1}{2\omega_{\boldsymbol{p}}}[a(\boldsymbol{p})a(-\boldsymbol{p})+a(\boldsymbol{p})a^\dagger(\boldsymbol{p})$$
$$+a^\dagger(\boldsymbol{p})a(\boldsymbol{p})+a^\dagger(\boldsymbol{p})a^\dagger(-\boldsymbol{p})] \tag{38}$$

であるから，(8) により

$$P^0=H=\frac{1}{2}\int d^3p\,\omega_{\boldsymbol{p}}[a(\boldsymbol{p})a^\dagger(\boldsymbol{p})+a^\dagger(\boldsymbol{p})a(\boldsymbol{p})] \tag{39}$$

となることがわかる．ところが (39) は (32) と (35) を使うと，

$$P^0|0\rangle=\frac{1}{2}\int d^3p\,\omega_{\boldsymbol{p}}\delta(0)|0\rangle\neq0 \tag{40}$$

となり，スペクトル条件 2-2 の (18) と矛盾する．また (40) の $|0\rangle$ の係数は数学的に意味のない発散量である．この困難を避けるため，この常数部分を捨ててしまったものを改めて P^0 であると定義し直す．すなわち，(39) をやめて

$$P^0\equiv\int d^3p\,\omega_{\boldsymbol{p}}a^\dagger(\boldsymbol{p})a(\boldsymbol{p}) \tag{41}$$

であると定義する．常数項を捨てても交換関係には影響しない．

P^k の方は

$$P^k=\frac{1}{2}\int d^3x[\partial^k\phi(x)\partial^0\phi(x)+\partial^0\phi(x)\partial^k\phi(x)]$$
$$=\frac{1}{2}\int d^3p\,p^k[a(\boldsymbol{p})a^\dagger(\boldsymbol{p})+a^\dagger(\boldsymbol{p})a(\boldsymbol{p})] \tag{42}$$

である．積分の対称性を考慮すれば $P^k|0\rangle=0$ であるともいえるが，正しくは不定であるからやはり (41) のような形に定義し直す方がよい．すなわち，

$$P^k\equiv\int d^3p\,p^k a^\dagger(\boldsymbol{p})a(\boldsymbol{p}) \tag{43}$$

(41), (43) は，$a^\dagger(\boldsymbol{p})a(\boldsymbol{p})$ が運動量 $\boldsymbol{p}$ をもつ粒子の個数演算子であることを思い出すと極めて自然な表式であることがわかる．

$M^{\mu\nu}$ の運動量表示の計算では，積分記号下の x_μ がじゃまである．それで空間成分 x_l は

$$x^l\int d^3p\,a(\boldsymbol{p})e^{-ipx}=\int d^3p\,a(\boldsymbol{p})i\frac{\partial}{\partial p_l}e^{-ipx}=-i\int d^3p\frac{\partial a(\boldsymbol{p})}{\partial p_l}e^{-ipx} \tag{44}$$

のように処理し，x_0 は (20) により 0 とおく．そうすると上にやった計算を少し修正するだけで*，次の結果が得られる．

$$M^{0l}=\frac{1}{2}i\int d^3p\,\omega_{\boldsymbol{p}}\left[a^\dagger(\boldsymbol{p})\frac{\partial a(\boldsymbol{p})}{\partial p_l}-\frac{\partial a^\dagger(\boldsymbol{p})}{\partial p_l}a(\boldsymbol{p})\right] \tag{45}$$

$$M^{kl}=\frac{1}{2}i\int d^3p\left\{p^k\left[a^\dagger(\boldsymbol{p})\frac{\partial a(\boldsymbol{p})}{\partial p_l}-\frac{\partial a^\dagger(\boldsymbol{p})}{\partial p_l}a(\boldsymbol{p})\right]-(k\leftrightarrow l)\right\} \tag{46}$$

ただし $(k\leftrightarrow l)$ は第 1 項の l と k をいれかえたものを表わす．

(41), (43), (45), (46) の P^μ, $M^{\mu\nu}$ が交換関係 2-2 の (10)〜(12) を満足することは，(32), (33) を用いて直接確かめることができる（演習問題 2.5 参照）．ただし運動量空間でも部分積分は自由にできるものとする．また 4 次元的 Heisenberg 方程式 2-3 の (4) と，$\phi(x)$ がスカラーであることを示す式 2-3 の (6) ($s^{\mu\nu}=0$) も成立していることも容易に確かめられる．たとえば，

$$[a(\boldsymbol{p})e^{-ipx},\ M^{0l}]$$
$$=\frac{1}{2}i\int d^3q\,\omega_{\boldsymbol{q}}\left[\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})\frac{\partial a(\boldsymbol{q})}{\partial q_l}-\frac{\partial\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})}{\partial q_l}a(\boldsymbol{q})\right]e^{-ipx}$$

* 具体的にいえば，(36)〜(38) と (42) の左辺の積分記号下に x^l を挿入した式は，それぞれ右辺の角括弧内の各項の第 1 因子だけについて，a を $-i\partial a/\partial p_l$ に，$a^\dagger$ を $i\partial a^\dagger/\partial p_l$ におきかえたものになる．

$$=i\left[\omega_{\boldsymbol{p}}\frac{\partial a(\boldsymbol{p})}{\partial p_l}+\frac{1}{2}\frac{p_l}{\omega_{\boldsymbol{p}}}a(\boldsymbol{p})\right]e^{-ipx} \tag{47}$$

であるから，$p_0=\omega_{\boldsymbol{p}}$ と $p_l=-p^l$ に注意して部分積分すると，

$$[\phi^{(+)}(x),\ M^{0l}]=\frac{-i}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3p\sqrt{\frac{\omega_{\boldsymbol{p}}}{2}}\left(i\frac{p^l}{\omega_{\boldsymbol{p}}}x^0-ix^l\right)a(\boldsymbol{p})e^{-ipx}$$
$$=i(x^0\partial^l-x^l\partial^0)\phi^{(+)}(x) \tag{48}$$

が得られる．$\phi^{(-)}(x)=[\phi^{(+)}(x)]^\dagger$ なるゆえ，$\phi(x)=\phi^{(+)}(x)+\phi^{(-)}(x)$ に対して M^{0l} との交換関係が証明される．

2-4 f　4 次元交換関係　(26) と (32), (33) を用いると，相異なる時刻の場の演算子の交換関係

$$[\phi(x),\ \phi(y)]=[\phi^{(+)}(x),\ \phi^{(-)}(y)]+[\phi^{(-)}(x),\ \phi^{(+)}(y)]$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p\frac{1}{2\omega_{\boldsymbol{p}}}(e^{-ip(x-y)}-e^{+ip(x-y)}) \tag{49}$$

が得られる．これを ♦4 次元交換関係という．(49) の右辺を i で割ったものを $\Delta(x-y;\ \mu^2)$ と書き，♦不変デルタ関数(invariant delta function)と呼ぶ．不変というのは，Lorentz 不変の意味である．実際

$$d^3p/\omega_{\boldsymbol{p}} \tag{50}$$

は Lorentz 不変だから*，左辺から当然そうあるべきように (49) の右辺は Lorentz 不変である．

(49) は $x_0=y_0$ のときはもちろん 0 である．したがって Lorentz 不変性により，局所可換性 2–3 の (8) を満足していることがわかる．

上の $\Delta(x-y;\ \mu^2)$ のほかにも不変デルタ関数の名で総括して呼ばれる一群の Lorentz 不変な超関数があるが，これらは非常に重要であるので 2–6 で改めて詳しくその性質を調べる．

2-4 g　複素スカラー場　以上では $\phi(x)$ は Hermite と仮定してきたが，Hermite とは仮定しない場合は $\phi(x)$ を ♦荷電スカラー場あるいは ♦複素スカラー場という．荷電とは必ずしも電荷をもっているという意味ではなく，荷電共役によりもとと同一でない反粒子に移るという意味である**．$\phi^\dagger(x)$ を反粒子の場と考え，$\phi(x)$ とは独立な正準変数とみなす．

Lagrangian 密度は Hermite 性の要請から

---

* なぜなら，(50) は空間回転不変だから，たとえば第 1 軸方向の等速度変換に対して不変なことを示せばよい．$p_1'=\alpha p_1+\beta\omega_{\boldsymbol{p}}$，$\omega_{\boldsymbol{p}'}=\beta p_1+\alpha\omega_{\boldsymbol{p}}$ $(\alpha^2-\beta^2=1)$ とすると，$dp_1'=\alpha\,dp_1+\beta\omega_{\boldsymbol{p}}^{-1}p_1\,dp_1=(\omega_{\boldsymbol{p}'}/\omega_{\boldsymbol{p}})dp_1$．したがって $dp_1/\omega_{\boldsymbol{p}}$ は不変である．

** たとえば K^0 は複素スカラー場で記述される．

$$\mathcal{L}(x)=\partial^{\mu}\phi^{\dagger}(x)\cdot\partial_{\mu}\phi(x)-\mu^{2}\phi^{\dagger}(x)\phi(x) \tag{51}$$

となる.

$$\phi(x)\equiv(1/\sqrt{2})[\phi^{(1)}(x)+i\phi^{(2)}(x)] \tag{52}$$

とおき, $\phi^{(1)}(x)$ と $\phi^{(2)}(x)$ を Hermite 場とすると, (51) は

$$\mathcal{L}(x)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}\{\partial^{\mu}\phi^{(j)}(x)\cdot\partial_{\mu}\phi^{(j)}(x)-\mu^{2}[\phi^{(j)}(x)]^{2}\} \tag{53}$$

となるから, 完全に2つの独立な中性スカラー場に帰着される. しかし, そうはしないで $\phi(x)$ のまま扱う方が電磁場との相互作用を考える場合には便利である.

正準共役量は

$$\pi(x)\equiv\partial\mathcal{L}(x)/\partial\dot{\phi}(x)=\dot{\phi}^{\dagger}(x), \qquad \pi^{\dagger}(x)=\dot{\phi}(x) \tag{54}$$

のようになり, ダガーのあるなしがいれかわる. 正準交換関係は

$$[\phi(x_0, \boldsymbol{x}), \pi(x_0, \boldsymbol{y})]=[\phi^{\dagger}(x_0, \boldsymbol{x}), \pi^{\dagger}(x_0, \boldsymbol{y})]=i\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{55}$$

で, 他の組み合わせは可換となるが, これらはもちろん $\phi^{(1)}$, $\phi^{(2)}$ に分けてやったのと同じ式である.

運動量表示は $\phi(x)$ が Hermite でないため

$$\phi(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^{3}p\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\boldsymbol{p}}}}[a(\boldsymbol{p})e^{-ipx}+b^{\dagger}(\boldsymbol{p})e^{+ipx}] \tag{56}$$

$$\phi^{\dagger}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^{3}p\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\boldsymbol{p}}}}[b(\boldsymbol{p})e^{-ipx}+a^{\dagger}(\boldsymbol{p})e^{+ipx}] \tag{57}$$

のように2種類の演算子 $a(\boldsymbol{p})$ と $b(\boldsymbol{p})$ を導入しなければならない. 正準交換関係から

$$[a(\boldsymbol{p}), a^{\dagger}(\boldsymbol{q})]=[b(\boldsymbol{p}), b^{\dagger}(\boldsymbol{q})]=\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}) \tag{58}$$

で, 他の交換子は0となる.

4次元交換関係は (56)〜(58) により

$$[\phi(x), \phi^{\dagger}(y)]=i\Delta(x-y;\ \mu^{2}) \tag{59}$$

$$[\phi(x), \phi(y)]=[\phi^{\dagger}(x), \phi^{\dagger}(y)]=0 \tag{60}$$

となる.

2-4 h スカラー場と統計 本節でははじめからスカラー場は Bose 統計に従うものとして話をすすめたが, もし Fermi 統計に従うとしたらどうなるであろうか. このときは 2-1 d で述べたように, 交換関係をすべて反交換関係におきかえることになるから, (49) は

$$\{\phi(x), \phi(y)\}=i\Delta(x-y;\ \mu^{2}) \tag{61}$$

のようになるであろう．しかしこれは矛盾を含んだ式である．なぜなら，左辺は x と y との対称関数で右辺は反対称関数だからである．

ところが複素スカラー場に関しては，(59)，(60) の代りに反交換関係

$$\{\phi(x),\ \phi^\dagger(y)\}=i\Delta(x-y;\ \mu^2) \qquad (62)$$

$$\{\phi(x),\ \phi(y)\}=\{\phi^\dagger(x),\ \phi^\dagger(y)\}=0 \qquad (63)$$

を設定しても矛盾を生じない．(52) を代入すると，(59)，(60) の場合は $\phi^{(1)}(x)$，$\phi^{(2)}(x)$ が独立な中性スカラー場となるが，(62)，(63) の場合は独立ではなく

$$\{\phi^{(1)}(x),\ \phi^{(1)}(y)\}=\{\phi^{(2)}(x),\ \phi^{(2)}(y)\}=0 \qquad (64)$$

$$\{\phi^{(1)}(x),\ \phi^{(2)}(y)\}=-\Delta(x-y;\ \mu^2) \qquad (65)$$

となる．しかし (64) からわかるように*，この理論の Fock 空間は不定計量の Hilbert 空間 (1-2 f, 3-2 参照) にならざるを得ない．すなわち通常の Hilbert 空間での量子化を仮定すればスカラー場は Bose 統計に従わねばならないのである．

2-5 自由スピノル場

スピノルとは一般に Lie 群 $SL(2, \boldsymbol{C})$ の表現のことであるが，通常 ♦スピノル場というとスピン 1/2 の場の意味に使う．スピン 1/2 の場は Dirac 方程式に従うことが知られているので，♦Dirac 場と呼ぶ方が妥当であるかもしれない．スピノル場は質量 0 の例外的な場合を除いては，つねに複素場，すなわち自分自身と相異なる反粒子をもつ場である．

2-5 a Dirac 方程式 Schrödinger 方程式は時間に関して 1 階で空間に関して 2 階の線形偏微分方程式なので，相対論の要請を満たし得ない．両方を 2 階微分に統一した最も簡単な相対論的波動方程式が Klein-Gordon 方程式であるのに対し，両方とも 1 階微分に統一した最も簡単な相対論的波動方程式が ♦Dirac 方程式である．質量 m の自由場 $\psi(x)$ に対する Dirac 方程式は，

$$(-i\gamma^\mu\partial_\mu+m)\psi(x)=0 \qquad (1)$$

という形で書かれる．$-i\gamma^\mu\partial_\mu+m$ を ♦Dirac 演算子という．平行移動不変

---

* なぜなら，$f(x)$ を実数値関数とするとき，$\int d^4x\, f(x)\phi^{(1)}(x)|0\rangle$ という状態の自分自身との内積が 0 になる．

性の要請により，γ^μ は x_ν を含み得ないが，ただたんなる c 数とすると 2-3c で述べた要請

$$(\Box+m^2)\psi(x)=0 \tag{2}$$

を満たし得ない．(2) を満足するためには，

$$\Box+m^2=(i\gamma^\nu\partial_\nu+m)(-i\gamma^\mu\partial_\mu+m) \tag{3}$$

のように因数分解するものと仮定しなくてはならない．(3) から γ^μ は

$$\gamma^\mu\gamma^\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu=2g^{\mu\nu} \tag{4}$$

という反交換関係を満たさねばならないことがわかる．とくに

$$(\gamma^0)^2=-(\gamma^k)^2=1 \tag{5}$$

であり，相異なるものは反可換である．

(4) を満足する γ^μ は，実際次のように 4 次の正方行列を用いて作ることができる．σ_1, σ_2, σ_3 を 1-4 の (28) で定義した Pauli のスピン行列とし，σ_0 を 2 次の単位行列 $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ とすると，たとえば

$$\gamma^0=\begin{pmatrix}\sigma_0 & 0\\ 0 & -\sigma_0\end{pmatrix},\qquad \gamma^k=\begin{pmatrix}0 & -\sigma_k\\ \sigma_k & 0\end{pmatrix} \tag{6}$$

とすればよい．

γ^μ は行列として表わされるので，♦ガンマ行列 (gamma matrix) と呼ばれるが，行列はあくまで 1 つの表示であって本質は (4) を満足する既約な代数であればよいのである．実際，任意の 4 次の非特異行列 S を用いて (6) を S^{-1} と S で左右からはさんだものを考えると，同じ反交換関係 (4) を満足するのでこれも数学的に同等の権利をもつ γ^μ の表示を与える．しかし，(6) は物理的意味を考えるときには便利なことが多い．なお，(6) のように γ^0 が Hermite, γ^k が反 Hermite (すなわち $i\gamma^k$ が Hermite) になるように選んでおくと計算が簡単になるので，以下つねにそのようにとるものと約束する．

γ^μ のいずれとも反可換な行列としてもう 1 つ

$$\gamma^5\equiv\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3=(1/4!)\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma \tag{7}$$

が存在する．これは γ^k と同じく反 Hermite で

$$(\gamma^5)^2=-1 \tag{8}$$

である．

一般にガンマ行列の積は反可換性と (5) により，相異なるガンマ行列の積だけが独立なものであることがわかる．したがって，ガンマ行列の積の

うち一次独立なものは，1と γ^μ をも含めてちょうど16個あることになる．これは4次の正方行列の要素の数に等しいから，任意の4次の行列は複素数を係数としてこれらの16個の行列の一次結合で表わすことができる．16個の一次独立な行列として通常次のものをとる．

$$1,\quad \gamma^\mu,\quad \frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu-\gamma^\nu\gamma^\mu),\quad \gamma^5\gamma^\mu,\quad \gamma^5 \tag{9}$$

ガンマ行列の添字の上下のものの間の関係は

$$\gamma^0=\gamma_0,\quad \gamma^k=-\gamma_k,\quad \gamma^5=-\gamma_5 \tag{10}$$

である．また γ^μ が4次の行列であるため当然 ψ は4成分の量となる．それを列ベクトルの形で表示する．これに対しその Hermite 共役 $\psi^\dagger$ は行ベクトルであるとみなす．そうすると $\psi^\dagger\psi$ は1成分だけの量，$\psi\psi^\dagger$ は4次の正方行列を表わすことになる．

2-5 b Dirac 方程式の共変性 Dirac 方程式は Lorentz 変換してもその形が不変であることを証明しておこう．それにはまず

$$s^{\mu\nu}\equiv\frac{1}{4}i(\gamma^\mu\gamma^\nu-\gamma^\nu\gamma^\mu) \tag{11}$$

が，(4)を用いてすぐ確かめられるように，交換関係

$$[s^{\mu\nu},s^{\rho\sigma}]=-i[g^{\mu\rho}s^{\nu\sigma}-g^{\nu\rho}s^{\mu\sigma}+g^{\nu\sigma}s^{\mu\rho}-g^{\mu\sigma}s^{\nu\rho}] \tag{12}$$

を満足することに注意する(演習問題 2.6 参照)．(12)は Lorentz 群の generator $M^{\mu\nu}$ の満たす交換関係 2-2 の(12)と全く同形であるから，2-3 の(5)，(7)から $\psi(x)$ は無限小 Lorentz 変換 $l_\mu{}^\nu=g_\mu{}^\nu+\varepsilon_\mu{}^\nu$ に対し

$$\psi'(x')=\left(1+\frac{1}{2}i\varepsilon_{\mu\nu}s^{\mu\nu}\right)\psi(x)+O(\varepsilon^2) \tag{13}$$

と変換するはずである．ただし $x_\mu=x_\mu'+\varepsilon_\mu{}^\nu x_\nu'$．

$s^{\mu\nu}$ はさらに 2-2 の(11)とよく似た交換関係

$$[s^{\mu\nu},\gamma^\rho]=i(g^{\nu\rho}\gamma^\mu-g^{\mu\rho}\gamma^\nu) \tag{14}$$

を満足する．これを用いると，

$$\begin{aligned}
&(-i\gamma^\mu\partial_\mu'+m)\psi'(x')\\
&=[-i\gamma^\mu(\partial_\mu-\varepsilon_\mu{}^\nu\partial_\nu)+m]\left(1+\frac{1}{2}i\varepsilon_{\sigma\lambda}s^{\sigma\lambda}\right)\psi(x)+O(\varepsilon^2)\\
&=\left(1+\frac{1}{2}i\varepsilon_{\sigma\lambda}s^{\sigma\lambda}\right)\left[-i\gamma^\mu\partial_\mu-\frac{1}{2}i\varepsilon_{\nu\rho}(g^{\rho\mu}\gamma^\nu-g^{\nu\mu}\gamma^\rho)\partial_\mu\right.\\
&\qquad\left.+i\varepsilon_{\mu\nu}\gamma^\mu\partial^\nu+m\right]\psi(x)+O(\varepsilon^2)\\
&=\left(1+\frac{1}{2}i\varepsilon_{\sigma\lambda}s^{\sigma\lambda}\right)(-i\gamma^\mu\partial_\mu+m)\psi(x)+O(\varepsilon^2)
\end{aligned} \tag{15}$$

となるので，x 系での Dirac 方程式から x' 系の Dirac 方程式が導かれる．すなわち Dirac 方程式は Lorentz 共変である．(証明終)

2-5 c 双一次形式 (11) で定義された $s^{\mu\nu}$ は Hermite な成分と反 Hermite な成分をもつ．したがって，$\psi^\dagger\psi$ は Lorentz スカラーにはならない．しかし，$\gamma^0(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0=\gamma^\mu$ から明らかなように

$$\gamma^0(s^{\mu\nu})^\dagger\gamma^0=s^{\mu\nu} \tag{16}$$

であるから，$\psi^\dagger\gamma^0\psi$ は Lorentz スカラーである*.

ψ の各成分を ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4 とし，γ^0 に (6) の表示を用いると，

$$\psi^\dagger\gamma^0\psi=\psi_1{}^\dagger\psi_1+\psi_2{}^\dagger\psi_2-\psi_3{}^\dagger\psi_3-\psi_4{}^\dagger\psi_4 \tag{17}$$

となる．これを 1-2 の (8) と比較してみると(演算子ということを考えなければ $\psi_\alpha{}^\dagger$ は ψ_α の複素共役である)，ψ は不定計量の 4 次元複素ベクトル空間のベクトルとみられるわけである．通常

$$\bar{\psi}\equiv\psi^\dagger\gamma^0 \tag{18}$$

と書く．この記号を用いると，(9) を $\bar{\psi}$ と ψ ではさんだ双一次形式として次の Hermite な Lorentz 共変量が定義される．

$\bar{\psi}\psi$	スカラー (S)
$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$	ベクトル (V)
$i\bar{\psi}\frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu-\gamma^\nu\gamma^\mu)\psi$	反対称テンソル (T)
$i\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi$	軸性ベクトル (A)
$\bar{\psi}\gamma^5\psi$	擬スカラー (P) (19)

括弧内の文字はそれぞれの略号である．(19) の本義 Lorentz 変換に対する変換性は，(16), (14), (12) からすぐ示される．空間反転 ($x_0'=x_0$, $\boldsymbol{x}'=-\boldsymbol{x}$) に関しては，$\psi'(x')=\gamma^0\psi(x)$ であるので(この変換で Dirac 方程式が不変)，S と P, V と A はそれぞれ符号の異なる変換性を示す．

2-5 d Lagrangian 密度 $i\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x)$ は 4 次元積分すれば Hermite であるがそのままでは Hermite でないので，スピノル場の Lagrangian 密度は

$$i\cdot\frac{1}{2}[\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x)-\partial_\mu\bar{\psi}(x)\cdot\gamma^\mu\psi(x)]-m\bar{\psi}(x)\psi(x) \tag{20}$$

でなければならない．しかし，この式では正準量子化がやりにくいので，(20) の代りの式であるという了解のもとに，通常 Lagrangian 密度とし

---

* ψ は 360° 回転に対し符号を変えるが，$\psi^\dagger$ と ψ の積は 360° 回転に対しても不変である．

て書くのは

$$\mathcal{L}(x)\equiv-\bar{\psi}(x)(-i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}+m)\psi(x) \tag{21}$$

である．ψ, $\bar{\psi}$ を独立な変数とみると，変分原理から形式的に Dirac 方程式 (1) が導かれる．なお，(21) から $\psi(x)$ の次元は $[L^{-3/2}]$ であることがわかる．

2-5 e 量子化 $\psi(x)$ の正準共役量は

$$\partial\mathcal{L}(x)/\partial\dot{\psi}(x)=i\psi^{\dagger}(x) \tag{22}$$

であるから，$\psi(x)$ と $i\psi^{\dagger}(x)$ が正準交換関係を満たすとするのが正準量子化ということになる．しかしながら，スピンと統計の関係により，スピノル場 $\psi(x)$ は Fermi 統計に従わねばならない*．Fermi 統計に従う粒子を記述するには，交換関係の代りに反交換関係を用いなければならないことは，すでに 2-1 d で説明した．それゆえ，反交換関係

$$\{\psi_{\alpha}(x_0, \boldsymbol{x}),\ \psi_{\beta}^{\dagger}(x_0, \boldsymbol{y})\}=\delta_{\alpha\beta}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{23}$$

$$\{\psi_{\alpha}(x_0, \boldsymbol{x}),\ \psi_{\beta}(x_0, \boldsymbol{y})\}=\{\psi_{\alpha}^{\dagger}(x_0, \boldsymbol{x}),\ \psi_{\beta}^{\dagger}(x_0, \boldsymbol{y})\}=0 \tag{24}$$

を設定する．

ψ はこのように反可換量であるから変分原理のとり扱いは注意を要する．変分も ψ, $\bar{\psi}$ と反可換な量と考えておかなければならない．

Hamiltonian は

$$\begin{aligned}H&\equiv\int d^3x[i\psi^{\dagger}(x)\partial_0\psi(x)-\mathcal{L}(x)]\\&=\int d^3x\,\psi^{\dagger}(x)\mathrm{H}\psi(x)\end{aligned} \tag{25}$$

で与えられる．ただし

$$\mathrm{H}\equiv\gamma^0(-i\sum_k\gamma^k\partial_k+m)=-i\sum_k\alpha^k\partial_k+\beta m$$
$$(\alpha^k\equiv\gamma^0\gamma^k,\ \beta\equiv\gamma^0) \tag{26}$$

である．H が x_0 に依存しないこと，すなわち $\partial_0 H=0$ であることは，Dirac 方程式 (1) を

$$i\partial_0\psi(x)=\mathrm{H}\psi(x) \tag{27}$$

の形に書き直して用いればすぐ確かめられる．

Heisenberg 方程式は

$$i\partial_0\psi(x)=[\psi(x),\ H] \tag{28}$$

* 不定計量の Hilbert 空間を用いることを許せば Bose 統計に従うことも可能である．

であるが，恒等式

$$[A, BC] = \{A, B\}C - B\{A, C\} \tag{29}$$

と反交換関係 (23), (24) を用いて計算すると，(28) はたしかに Dirac 方程式 (27) と一致することがわかる.

2-5 f Dirac 方程式の平面波の解 前節と同様に $p_0 = E_{\boldsymbol{p}} \equiv \sqrt{m^2 + \boldsymbol{p}^2}$ と書くと，Dirac 方程式 (1) の平面波の解は，

$$(2\pi)^{-3/2}u(p)e^{-ipx} \quad \text{または} \quad (2\pi)^{-3/2}v(p)e^{+ipx} \tag{30}$$

で与えられる．ただし

$$(-\gamma^\mu p_\mu + m)u(p) = 0 \tag{31}$$

$$(\gamma^\mu p_\mu + m)v(p) = 0 \tag{32}$$

で，もちろん $u(p)$, $v(p)$ はともに 4 成分のスピノルである．とくに静止系 $\boldsymbol{p}=0$ では，ガンマ行列の表示 (6) を用いると，(31) から $u_3 = u_4 = 0$, $v_1 = v_2 = 0$ でなければならないことがわかる．それゆえ，u は静止系で第 1，第 2 成分から成るようなスピノルであり，v は第 3，第 4 成分から成るスピノルである．それぞれの 2 つの成分は，スピン自由度のスピン上向き，下向きに対応している．すなわち，Pauli のスピン行列 σ_3 の固有値が $+1$ のものと -1 のものである．その固有ベクトルであるスピノルを u_s, v_s ($s = \pm 1$) で表わそう．一般の座標系へは本義 Lorentz 変換という連続変換で移れるから，この名前のつけ方はそのまま使える．$u_s(p)$, $v_s(p)$ は，4 次元不定計量ベクトル空間 ((17) 参照) で規格化直交系をなすものとする．すなわち，

$$\bar{u}_{s'}(p)u_s(p) = -\bar{v}_{s'}(p)v_s(p) = \delta_{ss'} \tag{33}$$

$$\bar{v}_{s'}(p)u_s(p) = \bar{u}_{s'}(p)v_s(p) = 0 \tag{34}$$

である ($\bar{v}v$ のときの符号に注意)．また (31)〜(34) からわかるように，

$$\sum_s u_s(p)\bar{u}_s(p) = (\gamma^\mu p_\mu + m)/2m \tag{35}$$

$$-\sum_s v_s(p)\bar{v}_s(p) = (-\gamma^\mu p_\mu + m)/2m \tag{36}$$

であり，それぞれ正エネルギー，負エネルギーへの射影演算子* になっている．

2-5 g 運動量表示 2-4 の (56), (57) と同様に，$\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$ の運動

* 一般に射影演算子 P は，$P^2 = P = P^\dagger$ という性質をもつような演算子である ($P = P^\dagger$ という性質は必ずしも要求しないで，その代りこの性質をもつものを直交射影演算子と呼ぶこともある).

量表示は，$E_{\boldsymbol{p}}\equiv\sqrt{m^2+\boldsymbol{p}^2}$ として，

$$\psi(x)=(2\pi)^{-3/2}\int d^3p\sqrt{\frac{m}{E_{\boldsymbol{p}}}}\sum_s[a_s(\boldsymbol{p})u_s(p)e^{-ipx}+b_s^\dagger(\boldsymbol{p})v_s(p)e^{+ipx}] \tag{37}$$

$$\bar{\psi}(x)=(2\pi)^{-3/2}\int d^3p\sqrt{\frac{m}{E_{\boldsymbol{p}}}}\sum_s[b_s(\boldsymbol{p})\bar{v}_s(p)e^{-ipx}+a_s^\dagger(\boldsymbol{p})\bar{u}_s(p)e^{+ipx}] \tag{38}$$

である．これを用いると，反交換関係 (23)，(24) は a_s, $a_s^\dagger$, b_s, $b_s^\dagger$ の間の反交換関係に書きかえられる．すなわち

$$\{a_s(\boldsymbol{p}),\ a_{s'}^\dagger(\boldsymbol{q})\}=\{b_s(\boldsymbol{p}),\ b_{s'}^\dagger(\boldsymbol{q})\}=\delta_{ss'}\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}) \tag{39}$$

で，他の反交換子はすべて 0 になる．このことは (33)〜(36) を使って確かめられる．

このように，$a_s(\boldsymbol{p})$, $b_s(\boldsymbol{p})$ はフェルミオンの消滅演算子，$a_s^\dagger(\boldsymbol{p})$, $b_s^\dagger(\boldsymbol{p})$ はフェルミオンの生成演算子である．$b_s(\boldsymbol{p})$, $b_s^\dagger(\boldsymbol{p})$ は反粒子に対する演算子にほかならない．真空 $|0\rangle$ に対しては，すべての $\boldsymbol{p}$, s について

$$a_s(\boldsymbol{p})|0\rangle=b_s(\boldsymbol{p})|0\rangle=0 \tag{40}$$

である．

Poincaré 群の generator は，

$$P^\mu\equiv\int d^3p\,p^\mu\sum_s[a_s^\dagger(\boldsymbol{p})a_s(\boldsymbol{p})+b_s^\dagger(\boldsymbol{p})b_s(\boldsymbol{p})] \qquad (p_0=E_{\boldsymbol{p}}) \tag{41}$$

$$\begin{aligned}M^{0l}\equiv\frac{1}{2}i\int d^3pE_{\boldsymbol{p}}\sum_s\Big[&a_s^\dagger(\boldsymbol{p})\frac{\partial a_s(\boldsymbol{p})}{\partial p_l}-\frac{\partial a_s^\dagger(\boldsymbol{p})}{\partial p_l}a_s(\boldsymbol{p})\\&+b_s^\dagger(\boldsymbol{p})\frac{\partial b_s(\boldsymbol{p})}{\partial p_l}-\frac{\partial b_s^\dagger(\boldsymbol{p})}{\partial p_l}b_s(\boldsymbol{p})\Big]\\&+\int d^3p\sum_{s,s'}\{a_s^\dagger(\boldsymbol{p})[S^l(\boldsymbol{p})]_{ss'}a_{s'}(\boldsymbol{p})+b_s^\dagger(\boldsymbol{p})[S^l(\boldsymbol{p})]_{ss'}b(\boldsymbol{p})\}\end{aligned} \tag{42}$$

$$\begin{aligned}M^{kl}\equiv\frac{1}{2}i\int d^3p\Big\{p^k\sum_s\Big[&a_s^\dagger(\boldsymbol{p})\frac{\partial a_s(\boldsymbol{p})}{\partial p_l}-\frac{\partial a_s^\dagger(\boldsymbol{p})}{\partial p_l}a_s(\boldsymbol{p})\\&+b_s^\dagger(\boldsymbol{p})\frac{\partial b_s(\boldsymbol{p})}{\partial p_l}-\frac{\partial b_s^\dagger(\boldsymbol{p})}{\partial p_l}b_s(\boldsymbol{p})\Big]-(k\leftrightarrow l)\Big\}\\&+\int d^3p\sum_{s,s'}\Big[a_s^\dagger(\boldsymbol{p})\frac{1}{2}(\sigma^{kl})_{ss'}a_{s'}(\boldsymbol{p})+b_s^\dagger(\boldsymbol{p})\frac{1}{2}(\sigma^{kl})_{ss'}a_{s'}(\boldsymbol{p})\Big]\end{aligned} \tag{43}$$

となる．ただし，σ^{kl} は Pauli のスピン行列の番号をつけかえたもの，すなわち $\sum_j\epsilon_{jkl}\sigma_j$ で，また

$$S^l(\boldsymbol{p})=(E_{\boldsymbol{p}}+m)^{-1}\sum_{j,k}\epsilon_{jlk}p_k\sigma_j/2 \tag{44}$$

である．導出は P^μ については前節と同様にやれるが，$M^{\mu\nu}$ については $u_s(p)$, $v_s(p)$ の具体的な表式を必要とし，かなり面倒である．

2-5 h　4次元反交換関係　反交換関係 (39) などと (35), (36) を用いると，(37), (38) から4次元反交換関係

$$\{\psi_\alpha(x),\ \bar{\psi}_\beta(y)\}=iS_{\alpha\beta}(x-y;\ m) \tag{45}$$

$$\{\psi_\alpha(x),\ \psi_\beta(y)\}=\{\bar{\psi}_\alpha(x),\ \bar{\psi}_\beta(y)\}=0 \tag{46}$$

が導かれる．ただし，$S_{\alpha\beta}(x-y;\ m)$ は

$$S(x-y;\ m)\equiv(i\gamma^\mu\partial^x{}_\mu+m)\Delta(x-y;\ m^2) \tag{47}$$

の行列要素を意味する．これから $\psi(x)$ と $\bar{\psi}(y)$ は $(x-y)^2<0$ で反可換であることがわかる．

2-5 i　ガンマ行列のトレース　4章で必要になるガンマ行列のトレースについて少し述べておく．

周知のように，*トレース(trace, ドイツ語で *Spur*)とは一般に任意の正方行列の主対角線上の行列要素の和である．$A=(a_{jk})$ を正方行列とすれば，$\sum_j a_{jj}$ がそのトレースであり，それを $\mathrm{tr}\,A$ あるいは $\mathrm{Sp}\,A$ で表わす．トレースは a, b を数，A, B, $\cdots$ を同次の正方行列とするとき，

$$\mathrm{tr}(aA+bB)=a\,\mathrm{tr}\,A+b\,\mathrm{tr}\,B \tag{48}$$

$$\mathrm{tr}(AB\cdots YZ)=\mathrm{tr}(B\cdots YZA)=\mathrm{tr}(ZAB\cdots Y) \tag{49}$$

なる性質がある．(49) の特別な場合として，もし S が非特異行列であれば，

$$\mathrm{tr}(S^{-1}AS)=\mathrm{tr}\,A \tag{50}$$

が成立する．

ガンマ行列のトレースは，(50) のおかげでその表示に依存しない．それゆえ，(6) の表示からすぐわかるように

$$\mathrm{tr}(\gamma^\mu)=0 \tag{51}$$

である．一般に

［定理］　奇数個の γ^μ の積のトレースはつねに0である．

証明は，(50) で A を奇数個の γ^μ の積，S を γ^5 とし，後の γ^5 を $\{\gamma^\mu,\ \gamma^5\}=0$ を用いて前にもっていけばよい（符号が逆転する）．（証明終）

この定理は奇数階の常数テンソルの不存在からも明らかである．

ガンマ行列の積のトレースの計算は，その反交換関係 (4) をくり返し用いて行なう．

$$\mathrm{tr}(\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\cdots\gamma^{\mu_n})=2g^{\mu_1\mu_2}\,\mathrm{tr}(\gamma^{\mu_3}\cdots\gamma^{\mu_n})-\mathrm{tr}(\gamma^{\mu_2}\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_3}\cdots\gamma^{\mu_n})$$

$$=2\sum_{k=2}^{n}(-1)^k g^{\mu_1\mu_k}\,\mathrm{tr}(\gamma^{\mu_2}\cdots\gamma^{\mu_{k-1}}\gamma^{\mu_{k+1}}\cdots\gamma^{\mu_n})$$
$$+(-1)^{n-1}\,\mathrm{tr}(\gamma^{\mu_2}\cdots\gamma^{\mu_n}\gamma^{\mu_1}) \tag{52}$$

であるから，n が偶数のとき (49) により次の漸化式を得る．

$$\mathrm{tr}(\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\cdots\gamma^{\mu_n})=\sum_{k=2}^{n}(-1)^k g^{\mu_1\mu_k}\,\mathrm{tr}(\gamma^{\mu_2}\cdots\gamma^{\mu_{k-1}}\gamma^{\mu_{k+1}}\cdots\gamma^{\mu_n}) \tag{53}$$

偶数個の γ^μ の積のトレースは，自明の式

$$\mathrm{tr}(1)=4 \tag{54}$$

から出発して (53) により逐次計算すればよい．たとえば

$$\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu)=4g^{\mu\nu} \tag{55}$$
$$\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma)=4g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}-4g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}+4g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho} \tag{56}$$

である．一般に，γ^μ の積のトレースは計量テンソルだけで書け，かつ実数であることは (53) から証明できる．したがって，(49) を用いて

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\cdots\gamma^\sigma)&=\mathrm{tr}[(\gamma^\mu\gamma^\nu\cdots\gamma^\sigma)^\dagger]\\&=\mathrm{tr}(\gamma_0\gamma^{\sigma\dagger}\cdots\gamma^{\nu\dagger}\gamma^{\mu\dagger}\gamma_0)\\&=\mathrm{tr}(\gamma^\sigma\cdots\gamma^\nu\gamma^\mu)\end{aligned} \tag{57}$$

である．すなわち，トレース内のガンマ行列は逆順に並べかえてもかまわない．

2-6 不変デルタ関数

自由場の 4 次元交換関係の右辺に現われる不変デルタ関数は，場の量子論において極めて重要な超関数である．本節では Klein-Gordon 方程式の Lorentz 不変な解およびその Green 関数について詳しく調べる．これらはあとでしばしば用いられるものである．

2-6 a 不変デルタ関数の定義

Klein-Gordon 方程式

$$(\Box+m^2)\Delta^{(\cdot)}(x;\,m^2)=0 \tag{1}$$

の本義 Lorentz 変換に対し不変な解 $\Delta^{(\cdot)}(x;\,m^2)$ を一般に不変デルタ関数という．$\Delta^{(\cdot)}(x;\,m^2)$ の 4 次元 Fourier 変換を $\tilde{\Delta}^{(\cdot)}(p;\,m^2)$ と書くと，(1) は

$$(p^2-m^2)\tilde{\Delta}^{(\cdot)}(p;\,m^2)=0 \tag{2}$$

となるから，$\tilde{\Delta}^{(\cdot)}(p;\,m^2)$ は $\delta(p^2-m^2)$ に比例する．それゆえ一次独立

な不変デルタ関数として次の2つが存在することになる*.

$$\Delta(x;\, m^2) \equiv \frac{1}{(2\pi)^3 i} \int d^4p\, \epsilon(p_0)\delta(p^2-m^2)e^{-ipx} \tag{3}$$

$$\Delta^{(1)}(x;\, m^2) \equiv \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4p\, \delta(p^2-m^2)e^{-ipx} \tag{4}$$

ただし，p_0 はここでは 2-4 のときと違って $\boldsymbol{p}$ とは独立な積分変数と考えている．また $\epsilon(u)$ は今後しばしば使う記号で，u の符号を表わす関数，すなわち

$$\epsilon(u) \equiv \mathrm{sgn}\, u \equiv u/|u|, \qquad \epsilon(0)=0 \tag{5}$$

である．$\omega_{\boldsymbol{p}} \equiv \sqrt{m^2+\boldsymbol{p}^2}$ とすると，

$$\delta(p^2-m^2) = \delta((p_0-\omega_{\boldsymbol{p}})(p_0+\omega_{\boldsymbol{p}})) \tag{6}$$

と書けるから，$\delta(p^2-m^2)$ は $p_0=\omega_{\boldsymbol{p}}$ のところと $p_0=-\omega_{\boldsymbol{p}}$ のところをべつべつに考察すればよい．1-1 の (17) を用いると，(6) は

$$\begin{aligned} \delta(p^2-m^2) &= \delta(2\omega_{\boldsymbol{p}}(p_0-\omega_{\boldsymbol{p}})) + \delta(-2\omega_{\boldsymbol{p}}(p_0+\omega_{\boldsymbol{p}})) \\ &= (2\omega_{\boldsymbol{p}})^{-1}[\delta(p_0-\omega_{\boldsymbol{p}}) + \delta(p_0+\omega_{\boldsymbol{p}})] \end{aligned} \tag{7}$$

となることがわかる．さらに (7) で右辺第1項では $p_0>0$ のところ，第2項では $p_0<0$ のところのみがきくことに注意すれば，

$$\epsilon(p_0)\delta(p^2-m^2) = (2\omega_{\boldsymbol{p}})^{-1}[\delta(p_0-\omega_{\boldsymbol{p}}) - \delta(p_0+\omega_{\boldsymbol{p}})] \tag{8}$$

が得られる．(8), (7) を (3), (4) にそれぞれ代入して p_0 積分を遂行すると，

$$\begin{aligned} \Delta(x;\, m^2) &= -i(2\pi)^{-3} \int d^3p (2\omega_{\boldsymbol{p}})^{-1} (e^{-i\omega_{\boldsymbol{p}}x_0+i\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}} - e^{i\omega_{\boldsymbol{p}}x_0-i\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}}) \\ &= -(2\pi)^{-3} \int d^3p\, \omega_{\boldsymbol{p}}^{-1} e^{i\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}} \sin \omega_{\boldsymbol{p}} x_0 \\ &= \frac{1}{2\pi^2 r} \frac{\partial}{\partial r} \int_0^\infty d|\boldsymbol{p}| \frac{\cos|\boldsymbol{p}|r \cdot \sin \omega_{\boldsymbol{p}} x_0}{\omega_{\boldsymbol{p}}} \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} \Delta^{(1)}(x;\, m^2) &= (2\pi)^{-3} \int d^3p\, \omega_{\boldsymbol{p}}^{-1} e^{i\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}} \cos \omega_{\boldsymbol{p}} x_0 \\ &= -\frac{1}{2\pi^2 r} \frac{\partial}{\partial r} \int_0^\infty d|\boldsymbol{p}| \frac{\cos|\boldsymbol{p}|r \cdot \cos \omega_{\boldsymbol{p}} x_0}{\omega_{\boldsymbol{p}}} \end{aligned} \tag{10}$$

と書きかえられる．ただし $r \equiv |\boldsymbol{x}|$．(9) はもちろん 2-4 f で定義した不変デルタ関数と一致している．

---

* (3), (4) のほかにも Lorentz 不変な (1) の解が存在する：

$$\Delta^{(3)}(x;\, m^2) \equiv \frac{m^2}{4\pi} \cdot \frac{J_1(m\sqrt{x^2})}{m\sqrt{x^2}}$$

この解は，光円錐上に特異性をもたないが，空間的遠方で指数関数的に増大する．

$\theta(u)$ を $u>0$ のとき 1, $u<0$ のとき 0 であるという関数とする:

$$\theta(u)\equiv\frac{1}{2}[1+\epsilon(u)] \tag{11}$$

これを用いて

$$\Delta^{(+)}(x;\,m^2)\equiv(2\pi)^{-3}\int d^4p\,\theta(p_0)\delta(p^2-m^2)e^{-ipx} \tag{12}$$

$$\Delta^{(-)}(x;\,m^2)\equiv-(2\pi)^{-3}\int d^4p\,\theta(-p_0)\delta(p^2-m^2)e^{-ipx} \tag{13}$$

を定義する*. これらは定義から明らかにそれぞれ正エネルギー部分, 負エネルギー部分にあたり,

$$i\Delta(x;\,m^2)=\Delta^{(+)}(x;\,m^2)+\Delta^{(-)}(x;\,m^2) \tag{14}$$

$$\Delta^{(1)}(x;\,m^2)=\Delta^{(+)}(x;\,m^2)-\Delta^{(-)}(x;\,m^2) \tag{15}$$

という関係がある. (14) の第1項, 第2項はそれぞれ 2-4 の (49) の第1項, 第2項に対応する.

2-6 b 不変デルタ関数の性質 定義式 (3), (4), (12), (13) から

$$\begin{aligned}&\Delta(-x;\,m^2)=-\Delta(x;\,m^2), &&\Delta^{(1)}(-x;\,m^2)=\Delta^{(1)}(x;\,m^2)\\ &\Delta^{(+)}(-x;\,m^2)=-\Delta^{(-)}(x;\,m^2), &&\Delta^{(-)}(-x;\,m^2)=-\Delta^{(+)}(x;\,m^2)\end{aligned} \tag{16}$$

で, 複素共役については

$$\begin{aligned}&[\Delta(x;\,m^2)]^*=\Delta(x;\,m^2), &&[\Delta^{(1)}(x;\,m^2)]^*=\Delta^{(1)}(x;\,m^2)\\ &[\Delta^{(+)}(x;\,m^2)]^*=-\Delta^{(-)}(x;\,m^2), &&[\Delta^{(-)}(x;\,m^2)]^*=-\Delta^{(+)}(x;\,m^2)\end{aligned} \tag{17}$$

である. また (9) から

$$\Delta(0,\,\boldsymbol{x};\,m^2)=0 \tag{18}$$

$$\dot{\Delta}(0,\,\boldsymbol{x};\,m^2)=-\delta(\boldsymbol{x}) \tag{19}$$

である. ここにもちろん $\dot{\Delta}\equiv\partial_0\Delta$. (18) と Lorentz 不変性から $x^2<0$ で $\Delta(x;\,m^2)=0$ であるが, $\Delta^{(1)}(x;\,m^2)$ の方は $x^2<0$ で 0 にならない.

(9) の積分は Lorentz 不変性を使うと容易に計算できる. 結果は

$$\Delta(x;\,m^2)=-\frac{1}{2\pi}\epsilon(x_0)\left[\delta(x^2)-\frac{m^2}{2}\theta(x^2)\frac{J_1(m\sqrt{x^2})}{m\sqrt{x^2}}\right] \tag{20}$$

となる. ただし J_n は Bessel (ベッセル) 関数で, $J_0'=-J_1$ を用いた. 光錐 $x^2=0$ の近くでは, J_1 のベキ級数展開により

$$\Delta(x;\,m^2)=-\frac{1}{2\pi}\epsilon(x_0)\left[\delta(x^2)-\frac{m^2}{4}\theta(x^2)\left(1-\frac{1}{8}m^2x^2+\cdots\right)\right] \tag{21}$$

となる. $\theta(x^2)$ にかかる括弧内の因子は m^2x^2 のベキ級数である.

---

* (12), (13) の右辺に $-i$ を掛けたものをそれぞれ $\Delta^{(+)}$, $\Delta^{(-)}$ と定義することもある.

(10) の方の積分は，Neumann (ノイマン) 関数と第1種 Hankel (ハンケル) 関数を使って，

$$\Delta^{(1)}(x\,;\,m^2)=\frac{1}{4\pi r}\frac{\partial}{\partial r}[\theta(x^2)N_0(m\sqrt{x^2})-i\theta(-x^2)H_0^{(1)}(im\sqrt{-x^2})] \tag{22}$$

のように書ける．$x^2=0$ の近くでは

$$\Delta^{(1)}(x\,;\,m^2)=-\frac{1}{2\pi^2}\left[\mathrm{P}\frac{1}{x^2}-\frac{m^2}{4}\log m^2|x^2|+O(1)\right] \tag{23}$$

のような特異性を示す．P は Cauchy の主値である．

2-6 c Green 関数の定義　Klein-Gordon 演算子 $\Box+m^2$ の ♦Green (グリーン) 関数 (Green's function) とは，

$$(\Box+m^2)\Delta_X(x\,;\,m^2)=\delta^4(x) \tag{24}$$

の Lorentz 不変な解を指す．Green 関数としては次の5つのものがよく用いられる*.

$$\bar{\Delta}(x\,;\,m^2)\equiv-\frac{1}{2}\epsilon(x_0)\Delta(x\,;\,m^2) \tag{25}$$

$$\Delta_R(x\,;\,m^2)\equiv-\theta(x_0)\Delta(x\,;\,m^2) \tag{26}$$

$$\Delta_A(x\,;\,m^2)\equiv\theta(-x_0)\Delta(x\,;\,m^2) \tag{27}$$

$$i\Delta_F(x\,;\,m^2)\equiv\bar{\Delta}(x\,;\,m^2)+\frac{1}{2}i\Delta^{(1)}(x\,;\,m^2) \tag{28}$$

$$-i\Delta_{\bar{F}}(x\,;\,m^2)\equiv\bar{\Delta}(x\,;\,m^2)-\frac{1}{2}i\Delta^{(1)}(x\,;\,m^2)=[i\Delta_F(x\,;\,m^2)]^* \tag{29}$$

これらが実際 (24) を満足していることは，公式

$$\frac{1}{2}\partial_0\epsilon(x_0)=\partial_0\theta(x_0)=\delta(x_0) \tag{30}$$

を用いて簡単に証明できる．たとえば，(26) から

$$\begin{aligned}(\Box+m^2)\Delta_R&=-\theta(x_0)(\Box+m^2)\Delta-2\delta(x_0)\dot{\Delta}-\delta'(x_0)\Delta\\&=-\delta(x_0)\dot{\Delta}-\partial_0[\delta(x_0)\Delta]\\&=\delta^4(x)\end{aligned} \tag{31}$$

である．ただし，最終段では (19) と (18) を用いた．

定義から明らかに，$\bar{\Delta}(x\,;\,m^2)$, $\Delta_F(x,\,m^2)$ $\Delta_{\bar{F}}(x\,;\,m^2)$ は x_μ の偶関数である．また (14), (15) を用いると次の式が導かれる．

---

*　Δ の添字の R, A, F はそれぞれ retarded, advanced, Feynman の頭文字である．Δ_R, Δ_A はそれぞれ Δ_{ret}, Δ_{adv} とも書かれる．Δ_F を Δ_c (c は causal の頭文字) と書く人もある．また Δ_F の定義は人によって数因子だけいろいろ異なるから注意を要する．

$$-i\Delta_R(x\,;\,m^2)=\theta(x_0)\Delta^{(+)}(x\,;\,m^2)+\theta(x_0)\Delta^{(-)}(x\,;\,m^2) \tag{32}$$

$$i\Delta_A(x\,;\,m^2)=\theta(-x_0)\Delta^{(+)}(x\,;\,m^2)+\theta(-x_0)\Delta^{(-)}(x\,;\,m^2) \tag{33}$$

$$\Delta_F(x\,;\,m^2)=\theta(x_0)\Delta^{(+)}(x\,;\,m^2)-\theta(-x_0)\Delta^{(-)}(x\,;\,m^2) \tag{34}$$

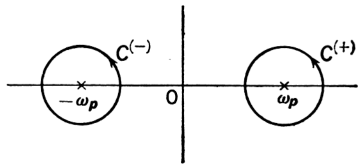
$$\Delta_{\bar{F}}(x\,;\,m^2)=\theta(-x_0)\Delta^{(+)}(x\,;\,m^2)-\theta(x_0)\Delta^{(-)}(x\,;\,m^2) \tag{35}$$

2-6 d Green 関数の運動量表示 まず Cauchy の積分表示 1-1 の (5) により，(12), (13) が

$$\Delta^{(+)}(x\,;\,m^2)=\frac{1}{(2\pi)^4 i}\int d^3p\int_{C^{(+)}}dp_0\frac{e^{-ipx}}{2\omega_{\boldsymbol{p}}(p_0-\omega_{\boldsymbol{p}})} \tag{36}$$

$$\Delta^{(-)}(x\,;\,m^2)=\frac{1}{(2\pi)^4 i}\int d^3p\int_{C^{(-)}}dp_0\frac{e^{-ipx}}{(-2\omega_{\boldsymbol{p}})(p_0+\omega_{\boldsymbol{p}})} \tag{37}$$

と書き直せることに注意しよう．ただし，2·2 図に示してあるように，$C^{(+)}$, $C^{(-)}$ はそれぞれ極 $p_0=\omega_{\boldsymbol{p}}$, $p_0=-\omega_{\boldsymbol{p}}$ を正の方向に一周するような積分路である．



2·2 図

$|e^z|=e^{\mathrm{Re}\,z}$ であるから，$\mathrm{Re}\,z\to-\infty$ では $|e^z|$ は急速に 0 に近づく．このことに注意して，Cauchy の定理を用いると (36), (37) から

$$\theta(\pm x_0)\Delta^{(+)}(x\,;\,m^2)=\frac{\mp 1}{(2\pi)^4 i}\int d^3p\int_{\boldsymbol{R}^{(\pm)}}dp_0\frac{e^{-ipx}}{2\omega_{\boldsymbol{p}}(p_0-\omega_{\boldsymbol{p}})} \tag{38}$$

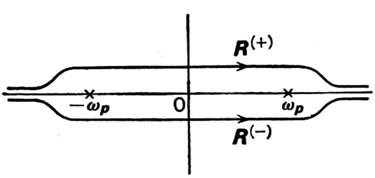
$$\theta(\pm x_0)\Delta^{(-)}(x\,;\,m^2)=\frac{\mp 1}{(2\pi)^4 i}\int d^3p\int_{\boldsymbol{R}^{(\pm)}}dp_0\frac{e^{-ipx}}{(-2\omega_{\boldsymbol{p}})(p_0+\omega_{\boldsymbol{p}})} \tag{39}$$

が得られる．ただし複号は同順で，積分路は実軸であるが，2·3 図に示すように極の近くでは $\boldsymbol{R}^{(+)}$ は上側を，$\boldsymbol{R}^{(-)}$ は下側を通ることを意味する．

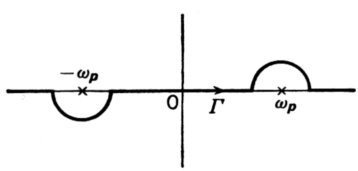
この結果を (32)～(34) に適用すれば

$$\Delta_R(x\,;\,m^2)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^3p\int_{\boldsymbol{R}^{(+)}}dp_0\frac{e^{-ipx}}{m^2-p^2} \tag{40}$$

$$\Delta_A(x\,;\,m^2)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^3p\int_{\boldsymbol{R}^{(-)}}dp_0\frac{e^{-ipx}}{m^2-p^2} \tag{41}$$



2·3 図



2·4 図

$$\Delta_F(x;m^2)=\frac{-i}{(2\pi)^4}\int d^3p\int_\Gamma dp_0\frac{e^{-ipx}}{m^2-p^2} \tag{42}$$

が得られる．ただし，積分路Γは2·4図に示したように極 $p_0=-\omega_p$ は下側を，$p_0=\omega_p$ は上側を通るような積分路である．これらの表式は，極の位置の方をずらせることにより4次元 Fourier 積分の形に書き直すのが便利である．すなわち，(40)～(42)はそれぞれ

$$\Delta_R(x;m^2)=\frac{1}{(2\pi)^4}\lim_{\varepsilon\to+0}\int d^4p\frac{e^{-ipx}}{m^2-p^2-ip_0\varepsilon} \tag{43}$$

$$\Delta_A(x;m^2)=\frac{1}{(2\pi)^4}\lim_{\varepsilon\to+0}\int d^4p\frac{e^{-ipx}}{m^2-p^2+ip_0\varepsilon} \tag{44}$$

$$\Delta_F(x;m^2)=\frac{-i}{(2\pi)^4}\lim_{\varepsilon\to+0}\int d^4p\frac{e^{-ipx}}{m^2-p^2-i\varepsilon} \tag{45}$$

のように書くことができる．また(28)に(4),(45)を代入すると，1-1 の(20)により

$$\bar{\Delta}(x;m^2)=\frac{1}{(2\pi)^4}\mathrm{P}\int d^4p\frac{e^{-ipx}}{m^2-p^2} \tag{46}$$

を得る．

2-6 e D 関数 $\Delta^{(\cdot)}(x;m^2)$, $\Delta_X(x;m^2)$ の $m=0$ の場合，すなわち $\Delta^{(\cdot)}(x;0)$, $\Delta_X(x;0)$ をそれぞれ $D^{(\cdot)}(x)$, $D_X(x)$ と書く．運動量表示では $m=0$ でも大して変わらないが，時空間表示の式は $m=0$ では著しく簡単になる．(20)と(22)から

$$D(x)=-(2\pi)^{-1}\epsilon(x_0)\delta(x^2) \tag{47}$$

$$D^{(1)}(x)=-\frac{1}{2\pi^2}\mathrm{P}\frac{1}{x^2} \tag{48}$$

であることがわかる．したがって，(14),(15)と 1-1 の(20)により

$$D^{(\pm)}(x)=\mp\frac{1}{(2\pi)^2}\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{x^2\mp ix_0\varepsilon} \tag{49}$$

となる．また Green 関数の方は，

$$\bar{D}(x)=(4\pi)^{-1}\delta(x^2) \tag{50}$$

$$D_{R/A}(x)=(2\pi)^{-1}\theta(\pm x_0)\delta(x^2) \tag{51}$$

$$D_{F/\bar{F}}(x)=-\frac{1}{(2\pi)^2}\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{x^2\mp i\varepsilon} \tag{52}$$

となる．ただし，複号の上下は D の添字の前後に対応する．

(47)～(52)を運動量表示の式(3),(4),(12),(13),(43)～(46)の $m=0$ の場合と比較してみると，

$$D\leftrightarrow D,\quad D^{(1)}\leftrightarrow\bar{D},\quad D^{(+)}\leftrightarrow D_A,\quad D^{(-)}\leftrightarrow D_R,\quad D_F\leftrightarrow D_{\bar{F}} \tag{53}$$

のような Fourier 双対関係にあることがわかる.

2-6 f S 関数 スピノル場に関連してでてくる Lorentz 共変な Dirac 方程式の解と Green 関数はそれぞれ

$$S^{(\cdot)}(x;m)\equiv(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}+m)\Delta^{(\cdot)}(x;m^2) \tag{54}$$

$$S_X(x;m)\equiv(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}+m)\Delta_X(x;m^2) \tag{55}$$

で定義される. それゆえ運動量表示は, たとえば

$$S_F(x;m)=\frac{-i}{(2\pi)^4}\lim_{\varepsilon\to+0}\int d^4p\frac{m+\gamma^{\mu}p_{\mu}}{m^2-p^2-i\varepsilon}e^{-ipx}$$

$$=\frac{-i}{(2\pi)^4}\lim_{\varepsilon\to+0}\int d^4p\frac{e^{-ipx}}{m-\gamma^{\mu}p_{\mu}-i\varepsilon} \tag{56}$$

となる.

2-7 相互作用

すべての素粒子は相互作用する. かりに相互作用しない素粒子があったとしても, それは決して生成されることがないし, はじめから存在していたとしても観測できないから, 存在しないのと同じことである*. 本節では, スピン0の場とスピノル場のみに関しての相互作用を考察する. 電磁相互作用は次章で論ずる.

2-7 a 相互作用 Lagrangian 密度 場の演算子の満たす方程式をでたらめに設定すると偏微分方程式系として不満足なものとなる. 通常, 相互作用を矛盾なく導入するには Lagrange 形式を用いる. 相互作用のある場合の $\mathcal{L}(x)$ は

$$\mathcal{L}(x)=\mathcal{L}_0(x)+\mathcal{L}_I(x) \tag{1}$$

のように2つの部分から成る. $\mathcal{L}_0(x)$ は ♦自由 Lagrangian 密度で, 考えている素粒子の自由場の Lagrangian 密度の和である. 自由場に関するものには添字0をつける. これはベクトルの第0成分とまぎらわしいけれども, 習慣上0を使うことになっているのでそれに従う. $\mathcal{L}_I(x)$ は ♦相互作用 Lagrangian 密度で, 本義 Lorentz 変換に対しスカラーであるような Hermite 演算子である. $\mathcal{L}_0(x)$ が場の演算子について2次斉次であるのに対し, $\mathcal{L}_I(x)$ は一般に3次以上の項から成る. たとえば, 中性スカラー場 $\phi(x)$ が自分自身と相互作用するような場合, $\mathcal{L}_I(x)$ として

* 重力相互作用しかしない重い素粒子があったとしたら, 素粒子物理学では発見できないが, 天体核物理学には重大な影響を与えるだろう.

$$(g/3!)\phi^3(x) \tag{2}$$

$$(\lambda/4!)\phi^4(x) \tag{3}$$

のような場合がよく考察される*. またスピノル場 $\psi(x)$ とスピン0の場 $\phi(x)$ との相互作用としては, 2-5 の (19) からたとえば

$$g_S\bar{\psi}(x)\psi(x)\phi(x) \tag{4}$$

$$g_V\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)\partial_\mu\phi(x) \tag{5}$$

$$ig_A\bar{\psi}(x)\gamma^5\gamma^\mu\psi(x)\partial_\mu\phi(x) \tag{6}$$

$$g_P\bar{\psi}(x)\gamma^5\psi(x)\phi(x) \tag{7}$$

$$\frac{1}{2}\hat{g}_S\bar{\psi}(x)\psi(x)\phi^2(x) \tag{8}$$

などが考えられる. ここで g, λ, g_S, g_V, g_A, g_P, $\hat{g}_S$ などのパラメーターは** 1-5 c でふれた ♦結合常数の例で, $\mathcal{L}_I(x)$ の Hermite 性により実数でなければならない.

2-7 b 相互作用の分類 $\phi(x)$, $\psi(x)$, $\mathcal{L}_I(x)$ の次元はそれぞれ $[L^{-1}]$, $[L^{-3/2}]$, $[L^{-4}]$ であるから, 結合常数の次元は, g が $[L^{-1}]$, λ, g_S, g_P が $[L^0]$, g_V, g_A, $\hat{g}_S$ が $[L^1]$ である. 一般に, 結合常数の次元を $[L^\rho]$ とするとき, $\rho\leqq 0$ の相互作用を ♦第1種相互作用, $\rho>0$ のものを ♦第2種相互作用という. あとで述べるように, この両者の間には本質的な相違がある.

別の分類の仕方として, $\mathcal{L}_I(x)$ が微分演算子を含んでいるかいないかで区別することがある. (5), (6) のように微分を含んでいるものを ♦微分結合 (derivative coupling), それ以外を ♦直接結合 (direct coupling) という. 微分結合は多くの場合第2種相互作用である.

2-7 c 場の方程式 場の演算子の満たす微分方程式を一般に ♦場の方程式(field equation)という. $\mathcal{L}_0(x)$ として 2-4 の (1) を, $\mathcal{L}_I(x)$ としてたとえば (3) を採用すると, 変分原理 2-4 の (3) により $\phi(x)$ の従う場の方程式は

$$(\Box+\mu_0{}^2)\phi(x)=(\lambda/3!)\phi^3(x) \tag{9}$$

となる. ただし, μ の代りに μ_0 と書いた***. それは自由場のときの質量という意味で, μ_0 は一般に相互作用のある場合の本当の質量 μ とは一致し

* 数字因子をいれる理由は, 2-1 a の $\langle 0|a^n(a^\dagger)^n|0\rangle=n!$ から想像がつくであろう (4-2 参照).

** これらの記号は本書だけのもので, λ 以外はスタンダードな記法ではない.

*** この添字0ももちろんベクトルの第0成分とは全く無関係である.

ないからである*. μ_0 のことを ♦はだかの質量(bare mass), μ のことを ♦物理的質量(physical mass)という.

また別の例として, $\mathcal{L}_0(x)$ を 2-4 の (1) と 2-5 の (21) との和, $\mathcal{L}_I(x)$ を (7) とすると, 場の方程式は,

$$(\Box+\mu_0{}^2)\phi(x)=g_P\bar{\psi}(x)\gamma^5\psi(x) \tag{10}$$

$$(-i\gamma^\mu\partial_\mu+m_0)\psi(x)=g_P\phi(x)\gamma^5\psi(x) \tag{11}$$

のような連立方程式になる.

(9)〜(11) の右辺に見られるように, 相互作用を表わす項は一般に同時空点の場の演算子の積が現われる. しかしながら, 場の演算子は 2-4, 2-5 で見たように, 自由場の場合ですらすでに超関数的なものである. 超関数の積は, 1-1 i でも注意したが, 一般には定義ができない. 場の方程式を使っていろいろの計算をする場合, いつでもこのことは困った問題をひき起こす. Fourier 変換して運動量空間に移ると, この困難は発散として現われる. 1-5 f でふれたように, 発散の困難はくりこみによってほとんど無害化される場合がある. これは $\mathcal{L}_I(x)$ に, くりこみ項と呼ばれる発散量の係数をもつ項を有限個形式的につけ加えることにより発散項を相殺させうる場合であり, この場合くりこみ可能という. くりこみ可能な場合というのは, 6-2 で詳しく説明するが, ちょうど $\mathcal{L}_I(x)$ が第1種相互作用だけを含む場合であり, 1つでも第2種相互作用があるとくりこみ不可能となる. 第2種相互作用は数学的に非常にタチの悪いものであり, 摂動展開の最低次以外はまともな計算ができない.

なお上で述べたように, $\mathcal{L}_I(x)$ には一般にくりこみ項をつけ加えておく必要がある. しかしくりこみのことは6章で詳しく論ずるので, ここではくりこみ項は書かないことにする.

2-7 d Hamiltonian 直接結合の場合は $\mathcal{L}_I(x)$ が場の演算子の時間微分を含まないから, 正準共役量は自由場のときと全く同じである. また相異なる場の演算子は通常同時刻では全く独立(すなわち可換または反可換)である. したがって, Hamiltonian 密度 $\mathcal{H}(x)$ は, 自由場のそれを $\mathcal{H}_0(x)$ とすると,

$$\mathcal{H}(x)=\mathcal{H}_0(x)-\mathcal{L}_I(x) \tag{12}$$

となる. つまり ♦相互作用 Hamiltonian 密度 $\mathcal{H}_I(x)\equiv\mathcal{H}(x)-\mathcal{H}_0(x)$ は

---

* これは場の量子論の特徴的な事情で, 自己場の効果として説明される (2-8 f, 6-2 参照).

相互作用 Lagrangian 密度の符号を変えたものに等しい.

微分結合があると，正準共役量の定義が変わってくるので，Hamiltonian 密度はもはや(12)のように簡単な形にはならない．しかし正準量子化をやる限り，Heisenberg 方程式は一般に場の方程式と一致する(付録参照)．それゆえ，Heisenberg 方程式はしばしば場の方程式と同義に用いられる．相互作用のある場合の場の演算子を満たす場の演算子を ♦Heisenberg 演算子という．

2-7 e　自由場の理論との関係　通常，相互作用のある場合にも自由場の理論の言葉や記号をそのまま流用するので，自由場のときの知識がそのまま成立するように錯覚する人がある．たとえば直接結合の場合，P_k は自由場の場合の P_k と全く同じ形をしているので，両者は完全に同じものだと思っている人があるが，もちろんこれは誤りである．実際このように考えると，なぜ Lorentz 共変性をこわさずに $P_0=H$ だけが(12)に示されているように，$-\int d^3x\mathcal{L}_I(x)$ だけ変われるのか理解できない．

場の演算子の汎関数としての形が，P_k では両方の場合について全く同じであっても，相互作用があるのとないのとでは場の演算子が相異なる内容をもつものであるから，これらの generator は演算子としては相異なるものである．自由場の量子論と相互作用のある場合の量子論とははっきり別の理論であって，前者が後者に含まれているのではない．つまり，法則自身が異なる2つの別の世界を考えているのである．

2-7 f　荷電独立　本書では相互作用の対称性については論じないが，参考のために荷電独立について簡単にふれておこう．強い相互作用を論ずるときは，電磁相互作用や弱い相互作用を無視するのは一応よい近似になる．その近似では，電荷だけが異なる強粒子は全く同じ性質をもつように見えるであろう．♦荷電独立(charge independence)とは，このように荷電以外にはよく似た強粒子は強い相互作用に関しては全く区別がつかないという仮定である．陽子 p と中性子 n は荷電以外の量子数はみな同じで，その質量差 $\Delta m\equiv m_p-m_n$ の絶対値は αm_p (α は微細構造常数*)よりも小さいくらいだから，電磁相互作用の結果として説明がつくと考えられる**.

* 1-5 c 参照.

** しかしながら，現在の場の量子論で計算すると，Δm は発散してしまう．あまり不自然でないやり方で無限大を切り捨てて勘定すると，どうやっても(bootstrap 的なやり方をしない限り) $\Delta m>0$ となってしまい，現実と合わない．これを (⇨)

そこで p と n の場の演算子をそれぞれ ψ_p, ψ_n とするとき，荷電独立の仮定により，Lagrangian 密度 $\mathcal{L}$ は両者を完全に対等な形で含んでいなければならない．理論の Lorentz 不変性から，スピノル場は双一次形式を通じてのみ $\mathcal{L}$ に含まれるので，$\mathcal{L}$ は ψ_p と ψ_n を混ぜ合わせるような特殊 unitary 変換群 $SU(2)$ に関して不変になると考えられる．この群を♦アイソスピン群(isospin group)と呼ぶ．ψ_p, ψ_n がアイソスピン群に従って変換するとき，一般に，他の強粒子も変換されるであろう．それゆえ，一般に荷電以外に区別のつかない強粒子は $SU(2)$ の表現として表わされなければならない．アイソスピン群の1つの既約表現に属している強粒子の組は，表現の次元すなわちその中の強粒子の数が 1, 2, 3 などのときそれぞれ♦isoscalar, ♦isospinor, ♦isovector などと呼ばれる．上述の核子の場は，p, n の2つから成るから isospinor, パイ中間子は π^+, π^0, π^- の3つから成るから isovector である．パイ中間子の場をそれぞれ ϕ_+, ϕ_0, ϕ_- と書くとき $(\phi_+)^\dagger=\phi_-$ であるので，2-4 の(52)のように $\sqrt{2}\phi_\mp\equiv\phi^{(1)}\pm i\phi^{(2)}$ とおけば，$\phi^{(1)}, \phi^{(2)}$ は Hermite である．さらに $\phi_0\equiv\phi^{(3)}$ とおけば，パイ中間子場は $(\phi^{(1)}, \phi^{(2)}, \phi^{(3)})$ で表わすことができる．このとき核子場とパイ中間子場だけの荷電独立な，そして実験的にも理論的にも最も合理的な Lagrangian 密度は，次の式で与えられる．

$$\mathcal{L}=-\bar{\psi}(-i\gamma^\mu\partial_\mu+m_0)\psi+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}[\partial^\mu\phi^{(j)}\cdot\partial_\mu\phi^{(j)}-\mu_0{}^2(\phi^{(j)})^2]$$
$$+G\sum_{j=1}^{3}\bar{\psi}\gamma^5\tau^{(j)}\psi\phi^{(j)} \tag{13}$$

ただし

$$\psi\equiv\begin{pmatrix}\psi_p\\ \psi_n\end{pmatrix},\quad \tau^{(1)}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad \tau^{(2)}=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\quad \tau^{(3)}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} \tag{14}$$

で，m_0, μ_0 はそれぞれ核子，パイ中間子のはだかの質量，G は結合常数である．

(⇨) 明快な形で解決することは，将来の理論の課題である．しかしもし Δm の値が絶対値は現実の値に等しく符号だけ逆である世界を空想するならば，陽子は自然崩壊するだろうから，水素原子は非常に稀な存在となり，われわれ人間のような高等生物はこの宇宙には出現できなかったであろう．したがって $\Delta m>m_e$ の宇宙は存在したとしても観測する高等生物がいないから，存在しないのと同じだとも考えられる．実際，高等生物の存在を許す素粒子の質量や結合常数の値は極めて限られた範囲にあるのかもしれない．

2-8 Heisenberg 演算子の一般的性質

Heisenberg 演算子は，相互作用のある場合の場の方程式が一般に非線形偏微分方程式であるため，特殊な事情のある場合のほか具体的にそれを求めることは実際上不可能である．しかしながら，Heisenberg 演算子は 2-3 で述べた一般的性質と正準交換関係によって与えられる同時刻での交換関係を満足しているはずであるから，これらを使っていろいろな一般的性質を調べることができる．本節ではそのごく初歩的な部分を紹介する．簡単のため，中性スカラー場 $\phi(x)$ の場合だけに話を限るが，以下の考察は少し変形すればもっと一般の場合にも拡張できるものである．

2-8 a　真空期待値　一般に演算子を1つの状態のブラとケットではさんだもの，すなわち行列表示の対角要素を，その演算子のその状態での♦期待値(expectation value)という．とくに真空 $|0\rangle$ での期待値を♦真空期待値(vacuum expectation value)という．Heisenberg 演算子は非常に複雑な演算子であるから，直接それを研究するよりも，その積あるいは積の適当な一次結合の真空期待値を調べる方が有効である．

n 個の $\phi(x)$ の積の真空期待値は，♦Wightman 関数とも呼ばれるが，2-3 の (3) と 2-2 の (15) により

$$\begin{aligned} W(x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(n)}) &\equiv \langle 0|\phi(x^{(1)})\phi(x^{(2)}) \cdots \phi(x^{(n)})|0\rangle \\ &= \langle 0|e^{iPx^{(1)}}\phi(0)e^{-iP(x^{(1)}-x^{(2)})}\phi(0) \cdots \phi(0)e^{-iP(x^{(n-1)}-x^{(n)})} \\ &\quad \times\phi(0)e^{-iPx^{(n)}}|0\rangle \end{aligned} \tag{1}$$

と書ける．ところで両端の $e^{iPx^{(1)}}$ と $e^{-iPx^{(n)}}$ は真空の定義 2-2 の (18) により1におきかえられるから，結局 $W(x^{(1)}, \cdots, x^{(n)})$ は $n-1$ 個の相対座標 $x^{(1)}-x^{(2)}, \cdots, x^{(n-1)}-x^{(n)}$ だけの関数である．

とくに $n=1$ のときは $\langle 0|\phi(x)|0\rangle$ は常数 $c\equiv\langle 0|\phi(0)|0\rangle$ である．$c\neq 0$ の場合は，$\phi(x)-c$ を改めて場の演算子と見直すことにする．そうすると一般性を失うことなしに

$$\langle 0|\phi(x)|0\rangle=0 \tag{2}$$

としてよい．ただし，もし Lagrangian 密度が与えられているときは，このおきかえにより $\mathcal{L}(x)$ の形が変化することに注意しなければならない (3-7 参照)．

2-8 b　完全規格化直交系　P_μ の固有値 p_μ に属する固有状態を $|p, \lambda\rangle$

で表わそう．ここに λ は P_μ と可換でまた相互に可換な Hermite 演算子の極大な組の固有値をまとめて表わすものとし，λ は離散的のように扱うことにする．$|p, \lambda\rangle$ は次の意味で規格化直交系になっているとする．

$$\langle p', \lambda' | p, \lambda\rangle = \delta_{\lambda'\lambda}\delta^4(p'-p) \tag{3}$$

(3) の右辺に負の量がでてこないのは，Hilbert 空間の計量の正値性によるものである．任意の状態は $|p, \lambda\rangle$ の一次結合で書けるはずだから，(3) を用いると完全性の式

$$\int d^4p \sum_\lambda |p, \lambda\rangle\langle p, \lambda| = 1 \tag{4}$$

が得られる．(4) は 1 の射影演算子 $|p, \lambda\rangle\langle p, \lambda|$ への分解とみることができる．(4) を (1) の各 $\phi(0)$ の間にはさむと，P_μ がすべてその固有値 p_μ に書きかえられる．

2-8 c　スペクトル表示　簡単のため，$n=2$ の場合について考えよう．(1) と (4) から

$$\begin{aligned} W(x, y) &= \langle 0|\phi(0)e^{-iP(x-y)}\phi(0)|0\rangle \\ &= \int d^4p \sum_\lambda \langle 0|\phi(0)|p, \lambda\rangle e^{-ip(x-y)}\langle p, \lambda|\phi(0)|0\rangle \\ &= \int d^4p\, e^{-ip(x-y)} \sum_\lambda |\langle p, \lambda|\phi(0)|0\rangle|^2 \end{aligned} \tag{5}$$

となる．2-2 d で述べたエネルギーの正値性の要請と，$W(x, y)$ の Lorentz 不変性により，

$$\sum_\lambda |\langle p, \lambda|\phi(0)|0\rangle|^2 = (2\pi)^{-3}\theta(p_0)\rho(p^2) \tag{6}$$

のように書くことができるはずである．さらにまたスペクトル条件から $p^2 \geqq 0$ でなければ $|p, \lambda\rangle$ は存在しないから，

$$\rho(p^2) = \int_0^\infty d\kappa^2 \delta(\kappa^2 - p^2)\rho(\kappa^2) \tag{7}$$

のように書きかえられる．(6)，(7) を (5) に代入し積分順序を交換すれば，

$$\begin{aligned} W(x, y) &= \int_0^\infty d\kappa^2 \int d^4p\, e^{-ip(x-y)}(2\pi)^{-3}\theta(p_0)\delta(\kappa^2-p^2)\rho(\kappa^2) \\ &= \int_0^\infty d\kappa^2 \rho(\kappa^2)\Delta^{(+)}(x-y\,;\kappa^2) \end{aligned} \tag{8}$$

を得る．ただしここで 2-6 の (12) を用いた．

(8) の複素共役をとると，2-6 の (17) により

$$W(x, y) = -\int_0^\infty d\kappa^2 \rho(\kappa^2)\Delta^{(-)}(x-y\,;\kappa^2) \tag{9}$$

となるから，(8) と (9) の差は 2-6 の (14) により

$$\langle 0|[\phi(x),\ \phi(y)]|0\rangle = i\int_0^\infty d\kappa^2 \rho(\kappa^2)\Delta(x-y;\ \kappa^2) \tag{10}$$

である．さらに ♦R 積(遅延交換子積)，および ♦T 積(時間順序積)を

$$\mathrm{R}[\phi(x)\phi(y)] \equiv \theta(x_0-y_0)[\phi(x),\ \phi(y)] \tag{11}$$

$$\mathrm{T}[\phi(x)\phi(y)] \equiv \theta(x_0-y_0)\phi(x)\phi(y)+\theta(y_0-x_0)\phi(y)\phi(x) \tag{12}$$

によって導入すると，(8)～(10) と 2-6 の (26), (34) から

$$i\langle 0|\mathrm{R}[\phi(x)\phi(y)]|0\rangle = \int_0^\infty d\kappa^2 \rho(\kappa^2)\Delta_R(x-y;\ \kappa^2) \tag{13}$$

$$\langle 0|\mathrm{T}[\phi(x)\phi(y)]|0\rangle = \int_0^\infty d\kappa^2 \rho(\kappa^2)\Delta_F(x-y;\ \kappa^2) \equiv \Delta_F{}'(x-y) \tag{14}$$

を得る．

$|p, \lambda\rangle$ に対するスペクトル条件が $\rho(\kappa^2)$ の中に入っているので，$\rho(\kappa^2)$ を ♦スペクトル関数(spectral function)，(8), (9), (10), (13), (14) のような式を ♦スペクトル表示(spectral representation)と呼んでいる．

$n\geqq 3$ のときは 4 次元運動量のスカラー積がたくさんでてくるので相当複雑になるが，Wightman 関数に関しては一般の n の場合について $\Delta^{(+)}$ を多変数に拡張したものを用いて表示できる．そしてそのさい 5 個以上の 4 次元運動量は一次独立ではありえないため，$n>5$ のものは $n=5$ の場合に帰着することが知られている．

2-8 d　スペクトル関数の性質　定義 (6) からわかるように

$$\rho(\kappa^2)\geqq 0 \tag{15}$$

である．このことのために $\rho(\kappa^2)$ は数学の言葉でいうと測度(measure)になっている．

$\phi(x)$ は Heisenberg 演算子であるけれども，同時刻では正準交換関係を満足すると考えられる．それゆえ，(10) の両辺を y_0 で微分して $y_0=x_0$ とおくと，

$$i\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = -i\int_0^\infty d\kappa^2 \rho(\kappa^2)\dot{\Delta}(0,\ \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y};\ \kappa^2) \tag{16}$$

となるが，2-6 の (19) を用いると

$$\int_0^\infty d\kappa^2 \rho(\kappa^2) = 1 \tag{17}$$

を得る．

2-8 e　はだかの確率　(7) ではスペクトル条件の $p^2\geqq 0$ だけを用いた

が，質量 0 の粒子でなければ 2-2 f で述べたようにもっと詳しいスペクトルがわかっているわけである．簡単のため，物理的質量 μ の粒子 1 種類だけの場合を考えると，

$$\rho(\kappa^2)=Z\delta(\kappa^2-\mu^2)+\theta(\kappa^2-4\mu^2)\sigma(\kappa^2) \tag{18}$$

のように書けるはずである．ただし

$$Z\cdot(2\pi)^{-3}\theta(p_0)\delta(p^2-\mu^2)\equiv|\langle p|\phi(0)|0\rangle|^2_{p^2=\mu^2}\geqq 0 \tag{19}$$

$$(2\pi)^{-3}\theta(p_0)\sigma(p^2)\equiv\sum_\lambda|\langle p,\lambda|\phi(0)|0\rangle|^2_{p^2\neq\mu^2}\geqq 0 \tag{20}$$

で，1 粒子状態は今の例では内部自由度がないから $|p,\lambda\rangle$ の代りに $|p\rangle$ と書いた．(18) を (17) に代入すれば

$$1-Z=\int_{4\mu^2}^{\infty}d\kappa^2\sigma(\kappa^2)\geqq 0 \tag{21}$$

を得るから

$$0\leqq Z\leqq 1 \tag{22}$$

でなければならない．

とくに $Z=1$ が成立するのは，(21) と (20) によって $\sigma(\kappa^2)\equiv 0$ の場合に限られるから，(8) と (18) から

$$\langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle=\Delta^{(+)}(x-y\,;\,\mu^2) \tag{23}$$

を得る．(23) に x と y についての Klein-Gordon 演算子を作用させ，Hilbert 空間では自分自身との内積が 0 のベクトルは 0 のみであることを用いると，$\phi(x)$ は 2-3 の (11) を満たさねばならないことがわかる．したがって，$Z=1$ のときは $\phi(x)$ は質量 μ の自由場にほかならない．それゆえ，相互作用がある限り

$$0\leqq Z<1 \tag{24}$$

である．

(19) を 2-1 の (7) の下で述べた確率解釈と比べてみると，Z は状態 $\phi(0)|0\rangle$ が 1 粒子状態にある確率を表わすと考えられる．(22) はこの解釈に矛盾がないことを保証する．相互作用のある場合は，(24) に示すように，$\phi(0)|0\rangle$ が多粒子状態にある確率 $1-Z$ が 0 でない．$\phi(0)|0\rangle$ が多粒子状態の部分をもっていることを比喩的に'着物を着ている (dressed あるいは clothed) という．これに対して，1 粒子状態の部分を'はだか (bare)，したがって Z のことを'はだかの確率という．

$Z=0$ の場合は，1 粒子状態 $|p\rangle$ が $\phi(x)$ に対応する状態であるとはいえなくなるので，以下 $Z\neq 0$ と仮定する．

2-8 f はだかの質量の表示 相互作用が 2-7 の (10) のように同時刻で $\dot{\phi}(x_0, \boldsymbol{y})$ と可換な場合は,

$$[(\Box+\mu_0{}^2)\phi(x_0, \boldsymbol{x}),\ \dot{\phi}(x_0, \boldsymbol{y})]=0 \tag{25}$$

である. 他方 (10) から

$$\langle 0|[(\Box+\mu_0{}^2)\phi(x),\ \phi(y)]|0\rangle=i\int_0^\infty d\kappa^2(-\kappa^2+\mu_0{}^2)\rho(\kappa^2)\Delta(x-y\,;\,\kappa^2) \tag{26}$$

であるから, これを y_0 で微分して $y_0=x_0$ とおくと, (25) により

$$\int_0^\infty d\kappa^2(-\kappa^2+\mu_0{}^2)\rho(\kappa^2)=0 \tag{27}$$

が得られる. (17) を用いると, これは

$$\mu_0{}^2=\int_0^\infty d\kappa^2\cdot\kappa^2\rho(\kappa^2) \tag{28}$$

と書き直すことができる. さらに (18) によれば $\rho(\kappa^2)$ は $\kappa^2<\mu^2$ では 0 だから,

$$\mu^2-\mu_0{}^2=-\int_0^\infty d\kappa^2(\kappa^2-\mu^2)\rho(\kappa^2)<0 \tag{29}$$

となって, スピン 0 の場では物理的質量の方がはだかの質量よりも小さいことがわかる.

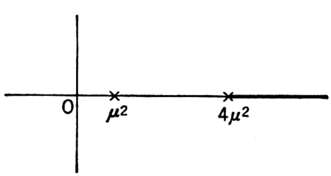
2-8 g 運動量表示 (14) の Fourier 変換に i を掛けたものを, $\Delta_F{}'(p)$ と書くと 2-6 の (45) からわかるように

$$\Delta_F{}'(p)=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^\infty d\kappa^2\frac{\rho(\kappa^2)}{\kappa^2-p^2-i\varepsilon} \tag{30}$$

となる. これを ♦Umezawa(梅沢)-Kamefuchi(亀淵)-Källén(チェレン)-Lehmann(レーマン)表示, あるいはたんに ♦Lehmann 表示という. (30) と (17) から $\Delta_F{}'(p)$ は $p^2\to\infty$ のとき自由場のときと同じく $-1/p^2$ のように振る舞うことがわかる. また (30) は

$$f(s)\equiv\int_0^\infty d\kappa^2\frac{\rho(\kappa^2)}{\kappa^2-s} \tag{31}$$

のような s の解析関数の上半面からの実軸上の境界値にほかならない. (30) に (18) を代入してみると明らかなように, $f(s)$ は $s=\mu^2$ に単純極, $s\geqq 4\mu^2$ にカットをもち, その他では正則な関数である (2·5 図参照).



2·5 図

(13) の Fourier 変換の方は，2-6 の (43) からわかるように，p^2 でなく p_0 を複素変数に拡張した解析関数の境界値である．それゆえ，どちらの場合も p_μ をすべて複素変数に拡張して得られる 4 変数の解析関数を考えれば，その境界値になっているわけである．一般に，R 積や T 積を n 個の $\phi(x)$ の場合に拡張したものの真空期待値に対しても，その Fourier 変換は $4(n-1)$ 個の複素変数の解析関数の境界値であることが知られている．

2-8 h　漸近場　Heisenberg 方程式は，2-7 の (9) の例のように，一般に

$$(\Box+\mu^2)\phi(x)=j(x) \tag{32}$$

と書くことができる．ただし $j(x)$ は相互作用を表わす部分で，Lagrangian 密度が与えられているときは $\partial\mathcal{L}_I(x)/\partial\phi(x)$ (に $(\mu^2-\mu_0{}^2)\phi(x)$ をつけ加えたもの) にほかならない．もし $j(x)$ を既知のように考えれば，偏微分方程式 (32) を解くことは，2-6 c の Klein-Gordon 演算子の Green 関数を用いて直ちに行なえる．すなわち，(32) は 2-6 の (24) により

$$\phi(x)=\phi^{\text{in}}(x)+\int d^4y\Delta_R(x-y\,;\,\mu^2)j(y) \tag{33}$$

あるいは

$$\phi(x)=\phi^{\text{out}}(x)+\int d^4y\Delta_A(x-y\,;\,\mu^2)j(y) \tag{34}$$

と書き直すことができる．(33), (34) を *Yang (ヤン)-Feldman (フェルドマン) の方程式という．ここで $\phi^{\text{in}}(x)$ と $\phi^{\text{out}}(x)$ は

$$(\Box+\mu^2)\phi^{\text{in}}(x)=0 \tag{35}$$

$$(\Box+\mu^2)\phi^{\text{out}}(x)=0 \tag{36}$$

のように Klein-Gordon 方程式を満たす演算子で，*漸近場(asymptotic field)と呼ばれるものである．この名前の意味は，Δ_R, Δ_A の定義 2-6 の (26), (27) からわかるように，(33), (34) の右辺の第 2 項はそれぞれ $x_0\to-\infty$, $x_0\to+\infty$ のとき y_0 の実質上の積分区間が消えてしまうので，形式的に

$$\phi(x)\longrightarrow\phi^{\text{in}}(x)\qquad(x_0\to-\infty) \tag{37}$$

$$\phi(x)\longrightarrow\phi^{\text{out}}(x)\qquad(x_0\to+\infty) \tag{38}$$

となるからである．(37) の意味するところをもう少し明確にいえば，任意の状態 $|\alpha\rangle$, $|\beta\rangle$ に対し，

$$\langle\beta|[\phi(x)-\phi^{\text{in}}(x)]|\alpha\rangle\longrightarrow 0\qquad(x_0\to-\infty) \tag{39}$$

となるということである*. もちろん, (38) についても同様である. このような極限を ♦弱極限(weak limit)というが, $\phi(x)$ の積や時間微分の $x_0 \to \pm\infty$ の弱極限は, 一般には $\phi(x)$ の $x_0\to\pm\infty$ の弱極限の積や時間微分とは一致しないことに注意しておこう.

さて, (32), (8), (18) から

$$\langle 0|j(x)j(y)|0\rangle=(\Box^x+\mu^2)(\Box^y+\mu^2)\int_0^\infty d\kappa^2 \Delta^{(+)}(x-y\,;\,\kappa^2)\rho(\kappa^2)$$
$$=\int_{4\mu^2}^\infty d\kappa^2(\kappa^2-\mu^2)^2\sigma(\kappa^2)\,\Delta^{(+)}(x-y\,;\,\kappa^2) \tag{40}$$

であるから, 1粒子状態 $|p\rangle$ に対し

$$\langle p|j(y)|0\rangle=0 \tag{41}$$

でなければならない. それゆえ (33) から

$$\langle p|\phi(x)|0\rangle=\langle p|\phi^{\rm in}(x)|0\rangle \tag{42}$$

を得る. すなわち $\phi^{\rm in}(x)$ の1粒子スペクトルは $\phi(x)$ のそれと一致する. ところが (35) により $\phi^{\rm in}(x)$ は自由場であるから, (10), (18) と比較すると4次元交換関係

$$[\phi^{\rm in}(x),\ \phi^{\rm in}(y)]=iZ\Delta(x-y\,;\,\mu^2) \tag{43}$$

を満足することがわかる. 全く同様にして

$$[\phi^{\rm out}(x),\ \phi^{\rm out}(y)]=iZ\Delta(x-y\,;\,\mu^2) \tag{44}$$

である.

2-8 i ***S*** **行列** $\phi^{\rm in}(x)$ により構成される Fock 空間の規格化直交系を ♦in-state と呼び $|\alpha,\,{\rm in}\rangle$ と書く. 同様に ♦out-state $|\beta,\,{\rm out}\rangle$ が定義される. そして

$$S_{\beta\alpha}\equiv\langle\beta,\,{\rm out}|\alpha,\,{\rm in}\rangle \tag{45}$$

とおくとき, 行列 $S=(S_{\beta\alpha})$ を ♦S 行列(S-matrix)と呼ぶ.

in-state の Fock 空間も out-state の Fock 空間もともに全体の Hilbert 空間と一致するものとすれば,

$$\sum_\alpha|\alpha,\,{\rm in}\rangle\langle\alpha,\,{\rm in}|=\sum_\beta|\beta,\,{\rm out}\rangle\langle\beta,\,{\rm out}|=1 \tag{46}$$

という完全性の式が成りたつ. そうすると

$$\sum_\beta(S^\dagger)_{\gamma\beta}S_{\beta\alpha}=\sum_\beta\langle\gamma,\,{\rm in}|\beta,\,{\rm out}\rangle\langle\beta,\,{\rm out}|\alpha,\,{\rm in}\rangle=\delta_{\gamma\alpha} \tag{47}$$
$$\sum_\gamma S_{\beta\alpha}(S^\dagger)_{\alpha\gamma}=\sum_\alpha\langle\beta,\,{\rm out}|\alpha,\,{\rm in}\rangle\langle\alpha,\,{\rm in}|\gamma,\,{\rm out}\rangle=\delta_{\beta\gamma} \tag{48}$$

---

* 厳密にいえば (39) は x_μ の各点で成立するのではなく, 任意のなめらかな関数を掛けて空間積分したものについて成立する.

であるから，Sは unitary である．なお $\phi^{in}(x)$ と $\phi^{out}(x)$ は

$$\phi^{out}(x)=S^{\dagger}\phi^{in}(x)S \tag{49}$$

で結ばれる．

(37), (38) を逆にたどって，S 行列を $\phi(x)$ の一般の T 積の真空期待値で表わすことができる．この理論形式を ♦Lehmann-Symanzik（シマンツィック）-Zimmermann（チンマーマン）形式あるいは簡単に ♦LSZ 形式という．LSZ 形式は，分散公式の証明の基礎となるもので，理論上極めて重要であるが，本書では割愛する．

2-8 j　漸近場についての注意　漸近場は自由場であるが，これは 4 章で述べる相互作用表示における自由場とは全く異なり，あくまでも Heisenberg 表示での演算子である．相互作用の影響があるため $\phi^{in}(x)$ も $\phi^{out}(x)$ も同じ自由場の方程式を満たしていても，(49) のように unitary 変換だけくい違っているものである．相互作用のある場合の Poincaré 群の generator は漸近場を用いて書くと，自由場の場合の式と形式的に全く同じ形に表わすことができる．また保存量を表わす演算子も漸近場で表わせば簡単になる．このように漸近場は理論的考察にとって極めて有用なものである．

演習問題 2.

2.1　aを $[a, a^{\dagger}]=1$ を満たす演算子とするとき，$z=0$ で正則な任意の関数 $f(z)$ に対し $[a, f(a^{\dagger})]=f'(a^{\dagger})$ であることを示せ．

2.2　2-1 の (37) と (49) を数学的帰納法を用いて証明せよ．

2.3　2-2 の (8) で定義される $M^{\mu\nu}$ が交換関係 2-2 の (12) を満たすことを確かめよ．

2.4　時間的ベクトル $(p_j)_\mu$ $(j=1, \cdots, n)$ が $(p_j)_0=\sqrt{m_j^2+\boldsymbol{p}_j^2}$ を満たすとき，不等式

$$\Bigl(\sum_{j=1}^{n}p_j\Bigr)^2 \geqq \Bigl(\sum_{j=1}^{n}m_j\Bigr)^2$$

が成立することを証明せよ．等号は $p_1, \cdots, p_n$ がすべて平行の場合に限る．

2.5　2-4 の (41), (43), (45), (46) の P^μ, $M^{\mu\nu}$ が Poincaré 群の generator の交換関係 2-2 の (10)〜(12) を満足することを確かめよ．

2.6　2-5 の (12) の $s^{\mu\nu}$ の交換関係を確かめよ．

2.7　Fourier 変換の公式

$$\epsilon(x_0)=\frac{i}{\pi}\mathrm{P}\int_{-\infty}^{+\infty}dk_0\, k_0^{-1}\exp(-ik_0x_0)$$

を証明し，これを利用して 2-6 の (25) から直接 $\bar{\Delta}(x;m^2)$ の運動量表示 2-6 の (46) を導け．

2.8 $\phi(x)$, $\pi(x)$ が Heisenberg 方程式

$$i\dot{\phi}=[\phi, H], \qquad i\dot{\pi}=[\pi, H]$$

を満足するならば，ϕ, $\partial_k\phi$, π の任意の多項式 $F(\phi, \partial_k\phi, \pi)$ も Heisenberg 方程式

$$i\dot{F}=[F, H]$$

を満足することを示せ．

2.9 $\psi(x)$ をスピノル場の Heisenberg 演算子とするとき，空間反転不変性のもとに，スペクトル表示

$$\langle 0|\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle=\int_0^\infty d\kappa^2[\rho_1(\kappa^2)i\gamma^\mu\partial^x{}_\mu+\rho_2(\kappa^2)]\Delta^{(+)}(x-y;\kappa^2)$$

の成立することを示せ．ただし $\rho_1(\kappa^2)$, $\rho_2(\kappa^2)$ は実で

$$\kappa\rho_1(\kappa^2)\geqq|\rho_2(\kappa^2)| \qquad (\kappa\geqq 0)$$

である．

3. 量子電磁力学

3-1 電磁場の量子化の問題

電磁場の古典論の相対論的共変な形式についてはすでに **1-3 e** で述べた．本章では電磁場を光子の場として相対論的共変な形式で量子化し，荷電場との相互作用の一般的性質を論ずる．

電磁場の量子化の問題は，場の量子論誕生のときから今日までずっと論じられてきた．それほど質量0のベクトル場の量子化というのは，どうにもとり扱いの厄介なものなのである．本節では最もなじみの深い電磁場が，なぜ量子化にあたってとくに扱いにくい存在なのかを説明する．

3-1 a 正準形式の困難 直接観測にかかるのは $F_{\mu\nu}(x)$ であるけれども，光子のスピンが1であることからも理解されるように基本的な量は4次元ポテンシャル $A_\mu(x)$ である．実際，荷電場との相互作用はすべて $A_\mu(x)$ の形でなされているので，$F_{\mu\nu}(x)$ を用いては正しい相互作用 Lagrangian 密度が作れない．

自由な電磁場に対する Lagrangian 密度は，古典論で知られているように，

$$\mathcal{L}_0=-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}=-\frac{1}{2}(\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu)\partial_\mu A_\nu \tag{1}$$

で与えられると考えるのが自然であろう．$A_\mu(x)$ はもちろん Hermite 場で，次元は $[L^{-1}]$ である．A_μ の各成分を独立変数とみて，(1) に変分原理を適用すれば，

$$\Box A_\mu-\partial_\mu\partial^\nu A_\nu=0 \tag{2}$$

を得る．

A_μ を正準変数とみれば，その正準共役量は

$$\pi_0 \equiv \partial \mathcal{L}_0 / \partial \dot{A}_0 = 0 \tag{3}$$

$$\pi_k \equiv \partial \mathcal{L}_0 / \partial \dot{A}_k = \dot{A}_k - \partial_k A_0 \tag{4}$$

となる．(3) により A_0 の正準共役量は存在しないことがわかる．それゆえ，正準交換関係は π_0 を含まない部分についてのみ設定しなければならないことになる．すなわち

$$[A_\mu(x_0, \boldsymbol{x}),\ \pi_l(x_0, \boldsymbol{y})] = i\delta_{\mu l}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{5}$$

$$[A_\mu(x_0, \boldsymbol{x}),\ A_\nu(x_0, \boldsymbol{y})] = 0, \qquad [\pi_k(x_0, \boldsymbol{x}),\ \pi_l(x_0, \boldsymbol{y})] = 0 \tag{6}$$

とする．しかし，これでは A_0 と $\dot{A}_0$ をどのようにとり扱えばよいのかわからない．

まず $\dot{A}_0$ に対しては，**1-3** の (14) の Lorentz 条件

$$\partial^\mu A_\mu = 0 \tag{7}$$

を課して，A_k で表わしてしまうことが考えられる こうすれば $\dot{A}_0$ に対する交換関係がなくても困らない．ただこの場合，(7) は Lagrange 形式とは異質的な条件になることに注意しなければならない．

A_0 の方は，(5)，(6) から見られるように同時刻ではすべての正準変数と可換である．ところが，(2) から

$$\Delta A_0 = \sum_l \partial_l \dot{A}_l \tag{8}$$

であって，これは (4) と (5) から導かれる交換関係

$$[A_k(x_0, \boldsymbol{x}),\ \dot{A}_l(x_0, \boldsymbol{y})] = i\delta_{kl}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{9}$$

と矛盾する．これを避けるためには，A_0 は (8) で定義されるものとして，A_0 の関係する交換関係は特別に設定しないことが考えられる．Laplacian の逆演算子 Δ^{-1} は*

$$\Delta^{-1}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = (2\pi)^{-3}\int d^3p \frac{e^{i\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}}{-\boldsymbol{p}^2} = -\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|} \tag{10}$$

で定義されるが，これを用いて (8) を A_0 について解き (4) に代入すると，

$$\pi_k = \dot{A}_k - \partial_k \Delta^{-1} \sum_l \partial_l \dot{A}_l \tag{11}$$

となる．(11) から $\sum_k \partial_k \pi_k = 0$ であるから，再び (5) と矛盾してしまう．独立な正準共役量は結局 2 つになったわけである．

3-1 b Coulomb ゲージでの量子化 上の議論の結果を見ると，正準変数を 4 つまたは 3 つとしたのでは具合が悪く，2 つとするのがよいこと

* $\boldsymbol{x}$ の任意の関数は $f(\boldsymbol{x}) = \int d^3y\, \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) f(\boldsymbol{y})$ と書けることに注意．

が示唆される．それで最初から Lorentz 共変性をあきらめて，(7) の代りに

$$\sum_k \partial_k A_k = 0 \tag{12}$$

という条件を導入し，A_1, A_2, A_3 が独立でないようにする．同時刻交換関係はこのとき (9) の代りに

$$[A_k(x_0, \boldsymbol{x}),\ \dot{A}_l(x_0, \boldsymbol{y})] = i(\delta_{kl} - \partial_k\partial_l\Delta^{-1})\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{13}$$

となる．また A_0 は (2) と (12) から $\Delta A_0=0$ となり，自由場では $A_0=0$ である．相互作用がある場合は 1-3 の (12) からわかるように (2) の右辺が j_μ となるので，(10) により

$$A_0(x) = -\Delta^{-1}j_0(x) = \frac{1}{4\pi}\int d^3y \frac{j_0(x_0, \boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|} \tag{14}$$

となる．

(12)～(14) で特徴づけられる電磁場の量子化を *Coulomb ゲージあるいは *radiation ゲージの量子論という．これで一応矛盾のない量子論ができあがるが，(12) や (14) から明らかなように Lorentz 不変性が明白でない．これは一般の Lorentz 共変な場の量子論の枠をはみだす．それゆえ，Heisenberg 表示での考察が全くできなくなるのみならず，くりこみ理論も事実上適用できない．これは Coulomb ゲージの量子論の決定的な欠陥である．そのもう 1 つの短所は，(13) のように非局所的な量を含むことである．つまり同時刻での空間的に離れた 2 点 x_μ, y_ν での $A_k(x)$ と $\dot{A}_l(y)$ とが可換でないわけで，局所可換性と矛盾している．もちろんこのことは A_k が直接観測可能量ではないので，物理的な困難をひきおこしはしない．実際，$F_{\mu\nu}$ に対しては非局所性はないことが確かめられる．なお，(14) の非局所性は Coulomb 力を遠隔作用としてとり扱っていることを示している．

3-1 c 4 次元交換関係の困難 A_μ が 4 次元ベクトルにならないという不都合は，正準量子化あるいは Lagrange 形式をやめれば避けられるだろうか．この問題を考えてみよう．

Lorentz 条件 (7) は Lorentz 不変な条件であり，A_μ の多すぎる自由度を消去するのに最も適した条件であるから，これを採用することにすると，場の方程式(2) は

$$\Box A_\mu = 0 \tag{15}$$

となる．つまり A_μ の各成分は質量 0 の自由スカラー場と同じ方程式を満

足する．2-6 a の議論から，(15) および局所可換性と両立する最も一般的な Lorentz 共変な 4 次元交換関係は，c_1，c_2 を実数として，

$$[A_\mu(x),\ A_\nu(y)]=i(c_1 g_{\mu\nu}+c_2\partial^x{}_\mu\partial^x{}_\nu)D(x-y) \tag{16}$$

である．しかし，(16) が Lorentz 条件 (7) と矛盾しないためには $c_1=0$ でなければならない．ところがそうすると，

$$[\partial_\rho A_\mu(x)-\partial_\mu A_\rho(x),\ A_\nu(y)]=0 \tag{17}$$

となって $F_{\rho\mu}(x)$ が $A_\nu(y)$ と全時空間で可換になり，物理的内容のない理論になってしまう．それゆえ，どうしても $c_1\neq0$ としなければならない．

$c_1\neq0$ とすると (16) は (7) と矛盾する．そこで Lorentz 条件の方をゆるめて，これを演算子に対する方程式ではなく，状態ベクトルに対する制限条件であると考える．つまり (7) の代りに

$$\partial^\mu A_\mu(x)|\text{phys}\rangle=0 \tag{18}$$

を満たすような状態 $|\text{phys}\rangle$ だけが物理的に意味のある状態であると考えるのである．このような制限条件を一般に ♦補助条件 (subsidiary condition あるいは constraint) と呼び，とくに (18) を ♦Fermi の補助条件という．

しかしながら，Fermi の補助条件はまだ (16) と矛盾する．というのは (16) から

$$\langle\text{phys}|[\partial^\mu A_\mu(x),\ A_\nu(y)]|\text{phys}\rangle=ic_1\partial_\nu D(x-y) \tag{19}$$

であるが，右辺は 0 でないのに左辺は (18) によって 0 になってしまうからである．Fermi の補助条件の困難は，とくに (16) を考えなくてもそれ自身の中にある．真空 $|0\rangle$ が物理的に意味のある状態でないと困るから $|\text{phys}\rangle$ として $|0\rangle$ を選べるとすると，(18) は $\partial^\mu A_\mu|0\rangle=0$ となり，2-3 c で述べたように，少なくとも Hilbert 空間ではこれは $\partial^\mu A_\mu=0$ に戻ってしまう．

Fermi の補助条件は，真空にある種の生成演算子を作用させて 0 になることを要請するところに無理がある．そこで $\partial^\mu A_\mu$ を

$$\partial^\mu A_\mu=(\partial^\mu A_\mu)^{(+)}+(\partial^\mu A_\mu)^{(-)} \tag{20}$$

のように正エネルギー部分 (消滅演算子の部分) と負エネルギー部分 (生成演算子の部分) にわけ，(18) の代りに

$$(\partial^\mu A_\mu)^{(+)}|\text{phys}\rangle=0 \tag{21}$$

という補助条件をおく．(21) を ♦Gupta (グプタ) の補助条件という．Lorentz 条件は (20) からわかるように $|\text{phys}\rangle$ における期待値

$$\langle \mathrm{phys}|\partial^\mu A_\mu(x)|\mathrm{phys}\rangle=0 \tag{22}$$

の意味で成立する．$(\partial^\mu A_\mu)^{(+)}$ は局所可換性をもたないから，Fermi の補助条件のような困難は伴わない．

補助条件の問題は一応これで解決するが，まだ困難が全部解決したわけではない．(16) において A_μ の代りに

$$A_\mu'\equiv A_\mu-(c_2/2c_1)\partial_\mu\partial^\rho A_\rho \tag{23}$$

を考えると，これは (16) の右辺の第2項のないような交換関係を満たし，(15) や (21) をそのままに保つから，一般性を失うことなしに，(16) の代りに

$$[A_\mu(x),\ A_\nu(y)]=ic_1g_{\mu\nu}D(x-y) \tag{24}$$

としてよい．また A_μ を適当に常数倍してもよいから，$c_1=\pm 1$ と考えてよい．2-4 d と同様に $A_\mu(x)$ の運動量表示を

$$A_\mu(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3p\frac{1}{\sqrt{2|\boldsymbol{p}|}}[a(\boldsymbol{p})e^{-ipx}+a^\dagger(\boldsymbol{p})e^{ipx}] \qquad (p_0=|\boldsymbol{p}|) \tag{25}$$

とすると，(24) は

$$[a_\mu(\boldsymbol{p}),\ a_\nu{}^\dagger(\boldsymbol{q})]=c_1g_{\mu\nu}\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}) \tag{26}$$

となる．$c_1=-1$ として $\mu=\nu$ の部分を書いてみると，

$$[a_k(\boldsymbol{p}),\ a_k{}^\dagger(\boldsymbol{q})]=+\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}) \tag{27}$$

$$[a_0(\boldsymbol{p}),\ a_0{}^\dagger(\boldsymbol{q})]=-\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}) \tag{28}$$

である．(27) では $a_k(\boldsymbol{p})$, $a_k{}^\dagger(\boldsymbol{q})$ がそれぞれ消滅演算子，生成演算子と解釈されるから，真空の Lorentz 不変性によりやはり $a_0(\boldsymbol{p})$ は消滅演算子，$a_0{}^\dagger(\boldsymbol{q})$ は生成演算子と解釈せざるを得ない．そうすると，(28) を真空ではさむと

$$\langle 0|a_0(\boldsymbol{p})a_0{}^\dagger(\boldsymbol{q})|0\rangle=-\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}) \tag{29}$$

となり，$\int d^3qf(\boldsymbol{q})a_0{}^\dagger(\boldsymbol{q})|0\rangle$ という状態は Hilbert 空間の計量の正値性と矛盾する．このことは $c_1=+1$ ととっても空間成分の方で同じことが起こり，より具合が悪いので，$c_1=-1$ に話を限る．(29) からわかるように，電磁場を共変的に量子化しようとすれば，どうしても状態ベクトルの空間として不定計量の Hilbert 空間を用いねばならないことになる．不定計量の Hilbert 空間を用い，Gupta の補助条件を課せば，明白に Lorentz 共変な形の電磁場の量子論を構成することができる．これを *Gupta-Bleuler (ブロイラー) 形式という．

なお，不定計量を用いないで明白に共変な電磁場の量子化に成功したと称する論文がいくつも発表されているが，これらはもちろん全部誤りである．正定値計量の Hilbert 空間では，対応する量子が観測されない Coulomb 力を近接作用として記述することは不可能であるから，相対論的共変性の要請を決して満たすことはできない．数学的には，不定計量の必要性は，質量 0 の量子に対する little group が $O(3)$ でなく $E(2)$ というようないわゆる非コンパクト群であることに基づくことが示される．

3-1 d 補助条件の必要性 不定計量の問題をはなれても，とにかく明白に共変な電磁場の量子化をやるためには，必ず何らかの形で補助条件を導入しなければならない．このことは極めて一般的に証明できる．仮定は次の通りで，$A_\mu(x)$ の局所可換性や詳細なスペクトル条件は必要としない．

1. $A_\mu(x)$ は Lorentz 変換に対し 4 次元ベクトルとして変換するような場の演算子である．

2. $A_\mu(x)$ は (2) を満足する．

3. $F_{\mu\nu}(x)\equiv\partial_\mu A_\nu(x)-\partial_\nu A_\mu(x)$ は確率解釈の可能な場である．すなわち，$f^{\mu\nu}(x)$ をタチのよい関数とするとき $\int d^4x f^{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x)|0\rangle$ は正定値計量の Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ に属する．$F_{\mu\nu}(x)$ は局所可換とする．

以下にその証明の概要を述べよう．

真空期待値

$$W_{\mu\nu}(x, y)\equiv\langle 0|A_\mu(x)A_\nu(y)|0\rangle \tag{30}$$

は，平行移動に対する不変性と Lorentz 共変性から

$$W_{\mu\nu}(x, y)=g_{\mu\nu}D_1(x-y)+\partial_\mu\partial_\nu D_2(x-y) \tag{31}$$

と書ける．ここに，D_1, D_2 は本義 Lorentz 変換に対し不変な関数である．$A_\mu(x)$ が (2) を満足することを使うと，(31) により

$$(\Box g_{\mu\nu}-\partial_\mu\partial_\nu)D_1(x)=0 \tag{32}$$

を得る．これに $g^{\mu\nu}$ を掛けると，$g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}=4$ だから

$$\Box D_1(x)=0 \tag{33}$$

となるので，(32) は

$$\partial_\mu\partial_\nu D_1(x)=0 \tag{34}$$

に帰着される．(34) の Lorentz 不変な解は常数しかありえないから，$D_1(x)\equiv c$ となり，これを (31) に代入すると，

$$W_{\mu\nu}(x, y)=g_{\mu\nu}c+\partial_\mu\partial_\nu D_2(x-y) \tag{35}$$

を得る．(30) と (35) を用いると

$$\langle 0|F_{\mu\nu}(x)F_{\rho\sigma}(y)|0\rangle=0 \tag{36}$$

となることがわかる．したがって，仮定3から

$$F_{\mu\nu}(x)|0\rangle=0 \tag{37}$$

となり，$\mathfrak{H}$ 内では

$$F_{\mu\nu}(x)=0 \tag{38}$$

である．それゆえ，物理的に意味のある電磁場の理論にならない．(証明終)

3-1e　ゲージ不変性と量子化　この証明からわかるように，困難の元凶は (2) である．直観的にいえば，$\Box g_{\mu\nu}-\partial_\mu\partial_\nu$ という微分演算子は ∂^μ と直交するから，Green 関数をもちえない．これが $A_\mu(x)$ というベクトル場の作れない理由である．そして (2) のもとをただすと，(1) がゲージ不変であるということに由来している．ゲージ変換と同じ形の変分を考えると変分自身がはじめから 0 になって，変分原理が意味をもたなくなる．これが (2) において $\Box g_{\mu\nu}-\partial_\mu\partial_\nu$ という特異な微分演算子の現われてくる理由である．それゆえ，この困難を避けるには，(1) のようなゲージ不変な Lagrangian 密度を採用すべきでないことがわかる．すなわち，電磁場の量子化では必ず量子化する前に，どういうゲージをとるかを決めなければならない．ゲージを決めてはじめて $A_\mu(x)$ がどのような場の方程式に従うかが決まり，そしてどのような補助条件を導入すべきかが定まるのである．このことはゲージ不変な理論の量子化においてつねに念頭においておかねばならない．

相異なるゲージの電磁場の量子論は，場の量子論としては相異なるものと考えるべきである．しかし直接観測に関係する量，たとえば S 行列要素とか期待値としての Maxwell 方程式とかはゲージによらない．古典論と違って量子論では，基礎方程式自身は決して完全な意味でのゲージ不変にはならないことに注意しなければならない．

3-2　不定計量の Hilbert 空間

前節でみたように，電磁場 $A_\mu(x)$ を明白に共変的に量子化するためには，どうしても不定計量の Hilbert 空間を導入することが必要である．Minkowski 空間が不定計量の空間であるから，質量が正の粒子の量子化が通常の Hilbert 空間でうまくいくことの方がむしろ例外的に幸いな事情とみるべきであろう．不定計量の Hilbert 空間についてはすでに 1-2f

で簡単に説明したが，本節では電磁場の量子化のまえに，不定計量のHilbert 空間での量子論の概念をはっきりさせるため，もう少し詳しい解説をしておこう．ベクトルの記法は 1-2 のものと異なり Dirac の記法に従う．なお，伝統的な不定計量演算子 η を用いる形式は，明白な共変性と矛盾しているばかりでなく，誤解の原因にもなるので，一切使用しないことを断わっておく．

3-2 a 一般化された固有状態 通常の Hilbert 空間では，Hamiltonian のような Hermite 演算子の固有状態をとってきて完全規格化直交系を作ることがつねに可能であるが，不定計量のベクトル空間では，有限次元の場合でさえ，一般にそうはいかない．H に基づいた完全系を構成するには，固有状態という概念を拡張する必要があるのである．

不定計量の Hilbert 空間 $\mathfrak{B}$ の部分空間 $\mathfrak{W}$ の任意のベクトル $|\alpha\rangle$ に対しつねに $H|\alpha\rangle \in \mathfrak{W}$ であるとき，$\mathfrak{W}$ を H の不変部分空間という．もしも $|\alpha\rangle$ が H の固有状態であれば，$|\alpha\rangle$ だけではられる 1 次元の部分空間は不変部分空間であるから，通常の Hilbert 空間ならばそれはつねに H の 1 次元の不変部分空間の直和に分解されるわけである*．いまの場合はそうはならなくて，$\mathfrak{B}$ を不変部分空間の直和に分解すると，一般に 1 次元でないものが必要になるのである．

$\mathfrak{B}$ が有限次元のベクトル空間であるときは，証明は省略するが次の定理が成立する．

［定理］ $\mathfrak{B}$ が有限次元ベクトル空間ならば，任意の（線形）演算子 H に対し，その不変部分空間 $\mathfrak{B}_1, \cdots, \mathfrak{B}_N$ が存在して，$\mathfrak{B}$ は

$$\mathfrak{B}=\mathfrak{B}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{B}_N \tag{1}$$

のように直和に分解する．ただし，これらの部分空間 $\mathfrak{B}_j$ にそれぞれ特定の複素数 λ_j ($j \neq k$ のとき $\lambda_j \neq \lambda_k$) が対応して，任意の $|\alpha_j\rangle \in \mathfrak{B}_j$ に対し

$$(H-\lambda_j)^{n_j}|\alpha_j\rangle=0 \tag{2}$$

が成り立つ．ここに n_j は $\mathfrak{B}_j$ の次元数を超えない正の整数で，適当な $|\beta_j\rangle \in \mathfrak{B}_j$ を選ぶと

$$(H-\lambda_j)^{n_j-1}|\beta_j\rangle \neq 0 \tag{3}$$

となるものとする．

この定理の内容は，$\mathfrak{B}$ のベクトルの内積の定義には全く無関係である．

---

* 部分空間の直和に分解されるとは，任意のベクトルが各部分空間のベクトルの和として一意的に表わせることをいう．

1例をあげれば，$\mathfrak{B}$ を3次元とし，H の行列表示が

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \tag{4}$$

の場合，$\mathfrak{B}$ は $|\alpha\rangle=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ と $|\beta\rangle=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ ではられる2次元の不変部分空間と，$|\gamma\rangle=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ ではられる1次元の不変部分空間の直和になり，

$$(H-\lambda_1)|\alpha\rangle=|\beta\rangle, \quad (H-\lambda_1)|\beta\rangle=0, \quad (H-\lambda_2)|\gamma\rangle=0 \tag{5}$$

である．内積の定義が関係してくるのは H の Hermite 性を問題にするときで，実際 H の行列表示が Hermite 行列でなければならないとすれば (4) のような例は否定される．ところが，不定計量のベクトル空間では H が Hermite 的であっても，**1-2 d** で説明したように，その行列表示は一般に Hermite 行列にはならないから，(4) のような行列表示をもつ H が許されてしまうのである．

$\mathfrak{B}$ が無限次元のときは，上述のような定理は証明できないが，以下では $\mathfrak{B}$ は有限の n_j をもつ不変部分空間 $\mathfrak{B}_j$ の（無限個の）直和に分解するものと仮定する．$\mathfrak{B}_j$ の任意のベクトルのことを λ_j に属する H の ${}^\bullet$一般化された固有状態(generalized eigenstate)と呼ぶ．

3-2 b ghost 不定計量の Hilbert 空間 $\mathfrak{B}$ では任意の状態 $|\alpha\rangle$ の自分自身との内積 $\langle\alpha|\alpha\rangle$ は必ず実数ではあるが，$|\alpha\rangle\neq0$ であっても $\langle\alpha|\alpha\rangle$ はゼロにも負にもなりうる．それゆえ，$\langle\alpha|\alpha\rangle$ を用いてノルムを定義することはできないけれども，Hilbert 空間の場合の術語を濫用して，$\langle\alpha|\alpha\rangle$ が正でない場合も $\langle\alpha|\alpha\rangle$ を(平方根をとらないで)${}^\bullet$ノルムと呼ぶ．もちろんこの用語は数学上のノルムの定義(**1-2 f** 参照)に合わないから，混乱を避けるためには他の言葉を用いた方がよいのであるが，習慣に従い $\langle\alpha|\alpha\rangle$ をノルムということにする．

$\langle\alpha|\alpha\rangle<0$ のような状態 $|\alpha\rangle$ は，量子論的な確率解釈が不可能である．それゆえ，このような状態を ${}^\bullet$ghost つまりオバケと呼んでいる．あとで述べるようにこのほかにもいろいろ変な ghost が存在する．ghost が出現するといつでも確率解釈に困るので，白昼下に化けて出ないように何とかオバケをとり押さえるように工夫しなければならない．この問題は不定計量を用いた場の量子論の一番の悩みの種であるが，次節以下で述べるよ

うに，幸いにして量子電磁力学では ghost の封じ込めがうまくいくことが証明できる．

3-2 c 直交性 以下ではつねに H は Hermite 的演算子とする．Hermite 的であっても λ_j は必ずしも実数とは限らないことに注意を要する．たとえば $|\alpha_j\rangle$ が λ_j に属する H の固有状態であったとしても，

$$(\lambda_j{}^*-\lambda_j)\langle\alpha_j|\alpha_j\rangle=\langle\alpha_j|(H-H)|\alpha_j\rangle=0 \tag{6}$$

から $\lambda_j{}^*=\lambda_j$ であるとは結論できない．なぜなら，$\langle\alpha_j|\alpha_j\rangle=0$ すなわちゼロノルムであるかもしれないからである．

［定理］ $\lambda_j \neq \lambda_k{}^*$ ならば，任意の $|\alpha_j\rangle \in \mathfrak{V}_j$ と $|\alpha_k\rangle \in \mathfrak{V}_k$ とは直交する．

証明は次の通りである．仮定から

$$(H-\lambda_j)^{n_j}|\alpha_j\rangle=0, \qquad \langle\alpha_k|(H-\lambda_k{}^*)^{n_k}=0 \tag{7}$$

である．$\lambda_j \neq \lambda_k{}^*$ なるゆえ，2つの多項式 $(x-\lambda_j)^{n_j}$ と $(x-\lambda_k{}^*)^{n_k}$ とは互いに素である(つまり数因子以外の共通因子はない)．このときよく知られているように，多項式 $f(x)$, $g(x)$ が存在して

$$f(x)(x-\lambda_j)^{n_j}+g(x)(x-\lambda_k{}^*)^{n_k}=1 \tag{8}$$

と書ける*．それゆえ (7) により

$$\langle\alpha_k|\alpha_j\rangle=\langle\alpha_k|f(H)(H-\lambda_j)^{n_j}|\alpha_j\rangle+\langle\alpha_k|(H-\lambda_k{}^*)^{n_k}g(H)|\alpha_j\rangle=0 \tag{9}$$

となる．(証明終)

この定理から λ_j が実数でないならば $\mathfrak{V}_j$ のベクトルはすべてゼロノルムであることがわかる．またそのとき 1-2 b で述べた $\mathfrak{V}$ が縮退していないという仮定から，$\lambda_j{}^*$ に属する不変部分空間が存在しなければならないことがわかる．この2つの部分空間は全く同じ構造をもつことが(少なくとも $\mathfrak{V}$ が有限次元** のときは)証明できる．λ_j が実数でない場合，$\mathfrak{V}_j$ に属するベクトルを一般に complex ghost と呼んでいるが，complex ghost は H が Hamiltonian ならばスペクトル条件に反するので，除外するのが普通である***．以下では λ_j が実数の場合に話を限ることにする．

3-2 d $\mathfrak{V}_j$ の直和分解 実数 λ_j に対応する不変部分空間 $\mathfrak{V}_j$ をさらに

---

* F, G が互いに素なとき必ず $fF+gG=1$ とできることは，F, G のうち低い方の次数を n とするとき n についての数学的帰納法で証明できる．たとえば G の次数が n ならば，$F=QG+R$ とすることにより G と R に対する同じ問題に帰着するからである．

** 無限次元のときも Krein 空間には拡張される．

*** しかし complex ghost を利用して場の量子論の発散の困難を除去しようという試みもある．2-2 f で述べたタキオンを complex ghost の一種とみなす考えもある．

簡単な不変部分空間に分解することを考える．まず次のことに注意する．すなわち，

$$\langle\xi_j|(H-\lambda_j)^{n_j-1}|\xi_j\rangle\neq 0 \tag{10}$$

となる $|\xi_j\rangle\in\mathfrak{V}_j$ が存在しなければならない．なぜなら，もしすべての $|\xi_j\rangle\in\mathfrak{V}_j$ について (10) の左辺が 0 ならば，1-2 d で与えた定理によって $\mathfrak{V}_j$ 内では $(H-\lambda_j)^{n_j-1}$ が 0 と同じになり，(3) と矛盾するからである．

さて，n_j 個のベクトル

$$|\xi_j\rangle,\ (H-\lambda_j)|\xi_j\rangle,\ \cdots,\ (H-\lambda_j)^{n_j-1}|\xi_j\rangle \tag{11}$$

が一次独立であることは帰謬法を用いて直ちに証明できる．またこの n_j 個のベクトルではられる n_j 次元空間 $\mathfrak{W}_{j1}$ は (2) により不変部分空間であり，かつこれは $|\xi_j\rangle$ を含む最小の不変部分空間である．$\mathfrak{V}_j$ が有限次元のときは上述のような $|\xi_j\rangle$ のとり出しをくり返えすことにより，つねに

$$\mathfrak{V}_j=\mathfrak{W}_{j1}\oplus\mathfrak{W}_{j2}\oplus\cdots\oplus\mathfrak{W}_{js} \tag{12}$$

のように直和に分解できることが証明できる．ただし $\mathfrak{W}_{jk}$ は (12) と同様な n_k ($\leqq n_j$) 個のベクトルではられる n_k 次元の不変部分空間で，$k\neq l$ ならば $\mathfrak{W}_{jk}$ と $\mathfrak{W}_{jl}$ とは直交する．$\mathfrak{V}_j$ が無限次元ならば必ずしもこのような $\mathfrak{W}_{jk}$ だけに分解できるという保証はないが，$\mathfrak{V}_j$ はやはり（一般には無限個）の $\mathfrak{W}_{jk}$ だけの直和に分解できると仮定するのが自然であろう．

3-2 e multipole ghost 一般に

$$(H-\lambda)^m|\xi\rangle=0 \qquad (m\geqq 2) \tag{13}$$

$$\langle\xi|(H-\lambda)^{m-1}|\xi\rangle\neq 0 \tag{14}$$

で，かつ $|\xi\rangle=(H-\lambda)|\xi'\rangle$ のような $|\xi'\rangle$ が存在しないとき，$|\xi\rangle$ のことを λ に属する m 次の ♦multipole ghost と呼び，とくに $m=2$ のときそれを ♦dipole ghost と呼ぶ．この言葉を使うと，考えている不定計量の Hilbert 空間 $\mathfrak{V}$ は，H の実固有値に属する固有状態および multipole ghost のつくる不変部分空間の直和に分解するような空間である．不定計量のベクトル空間では，multipole ghost は固有状態の拡張として極めて自然に入ってくる概念である．

参考のために，m 次の multipole ghost でつくられる空間 $\mathfrak{W}$ 内での H の行列表示と，$\mathfrak{W}$ への射影演算子とを求めておこう．

(14) の左辺は実数だから，$|\xi\rangle$ を適当に常数倍することにより，

$$\langle\xi|(H-\lambda)^{m-1}|\xi\rangle=\epsilon \qquad (\epsilon=\pm 1) \tag{15}$$

と規格化できる．さらに

$$|\zeta\rangle \equiv |\xi\rangle + \sum_{k=1}^{m-1} c_k (H-\lambda)^k |\xi\rangle \tag{16}$$

を導入し，順次 c_1, …, c_m を

$$\langle\zeta|(H-\lambda)^k|\zeta\rangle = 0 \qquad (k=m-2,\ m-3,\ \cdots,\ 0) \tag{17}$$

が成立するように決める．これは (15) のおかげでつねに可能である．定義から明らかなように，$|\zeta\rangle$ に対しても (13), (15) のような式が成立するから，これらをまとめると

$$\langle\zeta|(H-\lambda)^k|\zeta\rangle = \epsilon\delta_{k,m-1} \tag{18}$$

となる．

$\mathfrak{W}$ は m 個の独立なベクトル

$$|\zeta\rangle,\ (H-\lambda)|\zeta\rangle,\ \cdots,\ (H-\lambda)^{m-1}|\zeta\rangle \tag{19}$$

を基底に選ぶのが便利である．これらの間の内積は (18) によって与えられるから，それを行列の形でまとめると*,

$$\eta = \begin{bmatrix} 0 & & & \epsilon \\ & & \epsilon & \\ & \iddots & & \\ \epsilon & & & 0 \end{bmatrix} \tag{20}$$

となる．もちろん $\eta^2=1$ であるが，1-2 b のときと違って対角行列になっていないことに注意しなければならない．

$H-\lambda$ は 1 つの基底のベクトルをその次の基底のベクトルに写す演算子にほかならないから，H の行列表示を H と書くとき

$$\mathrm{H} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & & \vdots \\ 0 & 1 & \lambda & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & \lambda \end{bmatrix} \tag{21}$$

となる．H が Hermite 的であることは 1-2 d のときと同様に行列表示で

$$\mathrm{H}^\dagger = \eta\,\mathrm{H}\,\eta \tag{22}$$

と表わされる．

$\mathfrak{W}$ への射影演算子 $P_{\mathfrak{W}}$ は (19) と (18) から

$$P_{\mathfrak{W}} \equiv \epsilon \sum_{k=0}^{m-1} (H-\lambda)^k |\zeta\rangle\langle\zeta|(H-\lambda)^{m-k-1} \tag{23}$$

---

* この η は不定計量演算子を使う形式では，その行列表示になる．

で与えられることがわかる*. $\mathfrak{V}$ の完全性条件は1をこのような不変部分空間への射影演算子の和として表わすことにほかならないが, (23) の各項ではケット・ベクトルとブラ・ベクトルが一致していないような積を含んでいることに気をつける必要がある. なお, $|\zeta\rangle$ を使わないでもとの $|\xi\rangle$ を用いるときは, (23) に (16) を代入して得られる複雑な式になる.

3-2 f 物理的状態の空間 状態ベクトルのはる空間が不定計量の Hilbert 空間 $\mathfrak{V}$ であると, いろいろの ghost があって確率解釈ができなくなる. そこで通常 3-1 の (21) のような補助条件を導入し, 補助条件を満たす *物理的状態 (physical state) $|\mathrm{phys}\rangle$ だけが実際に実現される状態であり, これらについては確率解釈ができるものと考える. 物理的状態の全体ではられる $\mathfrak{V}$ の部分空間を $\mathfrak{V}_{\mathrm{phys}}$ とすると, 確率解釈が可能なためには, 任意の $|\alpha\rangle\in\mathfrak{V}_{\mathrm{phys}}$ に対し $\langle\alpha|\alpha\rangle\geqq 0$ でなければならない. $\mathfrak{V}_{\mathrm{phys}}$ は, しかし, ゼロノルムの状態を含んでいてもかまわない. $\mathfrak{V}_{\mathrm{phys}}$ に属するゼロノルム状態の全体は $\mathfrak{V}_{\mathrm{phys}}$ の部分空間をなす**. それを $\mathfrak{V}_0$ とすると,

$$\mathfrak{V}_{\mathrm{phys}}=\mathfrak{H}_{\mathrm{phys}}\oplus\mathfrak{V}_0 \tag{24}$$

のように直和に分解できる. ここに $\mathfrak{H}_{\mathrm{phys}}$ は正ノルムの状態のみではられる空間だから Hilbert 空間である.

任意の $|\gamma\rangle\in\mathfrak{V}_0$ は任意の $|\beta\rangle\in\mathfrak{V}_{\mathrm{phys}}$ と直交する. なぜなら, λ を複素数とするとき, $\lambda|\gamma\rangle+|\beta\rangle\in\mathfrak{V}_{\mathrm{phys}}$ であるからそのノルムは負になることはない. したがって, $\langle\gamma|\gamma\rangle=0$ を使うと,

$$2\,\mathrm{Re}(\lambda\langle\beta|\gamma\rangle)+\langle\beta|\beta\rangle\geqq 0 \tag{25}$$

を得る. (25) が λ のいかんにかかわらず成立するためには

$$\langle\beta|\gamma\rangle=0 \tag{26}$$

でなくてはならない.

このように, $\mathfrak{V}_0$ が 0 でない限り $\mathfrak{V}_{\mathrm{phys}}$ は縮退のある空間である. 次節でみられるように, 実際, 電磁場に対する $\mathfrak{V}_{\mathrm{phys}}$ は縮退のある空間である. このような場合は $\mathfrak{V}_{\mathrm{phys}}$ の直交補空間がないので, Hermite 的な $\mathfrak{V}_{\mathrm{phys}}$ への射影演算子は存在しないことに注意を要する. しかし, もちろん $\mathfrak{H}_{\mathrm{phys}}$ への射影演算子は存在する. それを $P\,(=P^\dagger)$ としよう. この

---

* $P_{\mathfrak{W}}{}^2=P_{\mathfrak{W}}=P_{\mathfrak{W}}{}^\dagger$ を確かめよ.

** もしも2つのゼロノルムのベクトル $|\alpha\rangle$ と $|\beta\rangle$ に対し $a|\alpha\rangle+b|\beta\rangle$ が正ノルムであったとすると, $a|\alpha\rangle-b|\beta\rangle$ が負ノルムになって仮定に反する.

とき次の重要な結果が一般的に成立する．

［定理］ 任意の $|\alpha\rangle, |\beta\rangle \in \mathfrak{V}_{\rm phys}$ に対して次の式が成立する：

$$\langle\beta|\alpha\rangle=\langle\beta|P|\alpha\rangle \tag{27}$$

証明は極めて簡単である．(24) により $(1-P)|\alpha\rangle \in \mathfrak{V}_0$ であるから，(26) を用いると

$$\langle\beta|(1-P)|\alpha\rangle=0 \tag{28}$$

である．(証明終)

3-3 自由な電磁場の共変的量子化

本節では，自由な電磁場の明白に共変的な量子化を行なう．もちろんそのためには不定計量の Hilbert 空間と補助条件の導入が必要である．以下に述べる理論は，従来用いられてきた Gupta-Bleuler 形式を特別の場合として含むのみならず，それよりもさらに理論的に満足すべき形式を与えることが次第に明らかになるであろう．

3-3 a 場の方程式 3-1 e で注意したように，ゲージ不変な Lagrangian 密度から出発したのでは量子化がうまくいかない．それゆえ，はじめから共変なゲージを指定するような理論構成をとることが必要である．そのためには，$A_\mu(x)$ のほかに別に $B(x)$ という補助の中性スカラー場を導入するのが便利である．そして，自由な電磁場の Lagrangian 密度 $\mathcal{L}_{EM}$ として

$$\mathcal{L}_{EM}\equiv-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}+B\partial^\mu A_\mu+\frac{1}{2}\alpha B^2 \tag{1}$$

を採用する．ここに α は ♦ゲージ・パラメーターと呼ばれる実数で，$\alpha=1$ のときをとくに ♦Fermi ゲージあるいは ♦Feynman ゲージ，$\alpha=0$ のときを ♦Landau (ランダウ) ゲージと呼ぶ．(1) からわかるように，B の次元は通常のスカラー場と異なり $[L^{-2}]$ であることに注意を要する．α の次元は $[L^0]$ である．

もし $\alpha\neq0$ ならば，$C\equiv\partial^\mu A_\mu+\alpha B$ というスカラー場を定義すると，(1) は

$$\mathcal{L}_{EM}=-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\alpha^{-1}(\partial^\mu A_\mu)^2+\frac{1}{2}\alpha^{-1}C^2 \tag{2}$$

と書き直すことができる．(2) では A_μ と C とは完全に無関係であり，しかもあとで見られるように相互作用は A_μ だけがするので，C は全く無用

の長物であって捨ててしまってもよいわけである．しかしながら，$\alpha=0$ の Landau ゲージの場合には (2) のように変形できない．しかもあとでわかるように Landau ゲージの場合が最も重要な場合であるので，やはり B を消去しないでもとの (1) を出発点とする．

(1) に対して変分原理を適用して得られる場の方程式は，3-1 a と違って

$$\square A_\mu-\partial_\mu\partial^\nu A_\nu-\partial_\mu B=0 \tag{3}$$

$$\partial^\mu A_\mu+\alpha B=0 \tag{4}$$

となる．(3) に ∂^μ を掛けると

$$\square B=0 \tag{5}$$

となるから，B も質量 0 の場であることがわかる．また (4) を (3) に代入すると，

$$\square A_\mu-(1-\alpha)\partial_\mu B=0 \tag{6}$$

となる．(4) からわかるように，$\alpha=0$ の場合に限り Lorentz 条件 $\partial^\mu A_\mu=0$ が満たされ，他方 (6) からわかるように，$\alpha=1$ の場合に限り d'Alembert 方程式 $\square A_\mu=0$ が満足される．これが Landau ゲージと Feynman ゲージが特別な地位を占める理由である．(5) と (6) から

$$\square\partial^\mu A_\mu=0 \tag{7}$$

$$\square^2 A_\mu=0 \tag{8}$$

は α に無関係に成立している．

3-3 b 正準量子化 A_μ を正準変数とするとき，正準共役量 π_μ は

$$\pi_0\equiv\partial\mathcal{L}_{EM}/\partial\dot{A}_0=B \tag{9}$$

$$\pi_k\equiv\partial\mathcal{L}_{EM}/\partial\dot{A}_k=\dot{A}_k-\partial_k A_0=F_{0k} \tag{10}$$

で定義される．3-1 a のときと違って π_0 が変数として意味をもつ．それゆえ，正準交換関係

$$[A_\mu(x_0, \boldsymbol{x}),\ \pi_\nu(x_0, \boldsymbol{y})]=i\delta_{\mu\nu}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{11}$$

$$[A_\mu(x_0, \boldsymbol{x}),\ A_\nu(x_0, \boldsymbol{y})]=[\pi_\mu(x_0, \boldsymbol{x}),\ \pi_\nu(x_0, \boldsymbol{y})]=0 \tag{12}$$

を設定しても困難は起こらない．(11), (12) を A_μ, $\dot{A}_k$, B を用いて書き直すと次のようになる．

$$[A_\mu(x_0, \boldsymbol{x}),\ A_\nu(x_0, \boldsymbol{y})]=0 \tag{13}$$

$$[A_\mu(x_0, \boldsymbol{x}),\ \dot{A}_l(x_0, \boldsymbol{y})]=i\delta_{\mu l}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{14}$$

$$[\dot{A}_k(x_0, \boldsymbol{x}),\ \dot{A}_l(x_0, \boldsymbol{y})]=0 \tag{15}$$

$$[A_\mu(x_0, \boldsymbol{x}),\ B(x_0, \boldsymbol{y})]=i\delta_{\mu 0}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{16}$$

$$[\dot{A}_k(x_0, \boldsymbol{x}),\ B(x_0, \boldsymbol{y})] = i\partial^x{}_k\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{17}$$

$$[B(x_0, \boldsymbol{x}),\ B(x_0, \boldsymbol{y})] = 0 \tag{18}$$

(13)〜(18) に $\dot{A}_0$ と $\dot{B}$ は現われないが，これらは場の方程式 (4) と (3) から

$$\dot{A}_0 = \sum_k \partial_k A_k - \alpha B \tag{19}$$

$$\dot{B} = \sum_k \partial_k \dot{A}_k - \Delta A_0 \tag{20}$$

のように表わせてしまうので，それらの同時刻交換関係は計算できる．たとえば (16), (17) から

$$[B(x_0, \boldsymbol{x}),\ \dot{B}(x_0, \boldsymbol{y})] = 0 \tag{21}$$

である．

3-3 c　Hamiltonian　自由な電磁場の Hamiltonian は

$$H_{EM} \equiv \int d^3x\, \hat{\mathcal{H}}_{EM}(x) \tag{22}$$

で定義される．ただし (10) より

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{H}}_{EM} &\equiv \sum_{k=1}^{3} \pi_k \dot{A}_k + \pi_0 \dot{A}_0 - \mathcal{L}_{EM} \\ &= \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \sum_k F_{0k}\dot{A}_k + B\sum_k \partial_k A_k - \frac{1}{2}\alpha B^2 \end{aligned} \tag{23}$$

である．これを (20) を使って書き直すと，

$$\hat{\mathcal{H}}_{EM} = \mathcal{H}_{EM} + \sum_k \partial_k (F_{0k}A_0 + BA_k) \tag{24}$$

となる．ただし

$$\mathcal{H}_{EM} \equiv \frac{1}{4}\sum_{k,l} F_{kl}{}^2 + \frac{1}{2}\sum_k F_{0k}{}^2 - \dot{B}A_0 - \sum_k \partial_k B \cdot A_k - \frac{1}{2}\alpha B^2 \tag{25}$$

である．(24) の第 2 項は 3 次元積分するとおちるから，(22) は

$$H_{EM} = \int d^3x\, \mathcal{H}_{EM}(x) \tag{26}$$

と書き直すことができる．

(22) または (26) を使って，A_k, A_0, π_k, π_0 に対する Heisenberg 方程式が書けるが，それらはそれぞれ恒等式，(19), (6) の空間成分，(20) に帰着する．すなわち正準量子化は矛盾なく行なわれている．

対称エネルギー運動量テンソル密度 $\Theta_{\mu\nu}(x)$ は*,

---

*　$(s^{\mu\nu})_{\alpha\beta} = i(g^{\mu}{}_{\alpha}g^{\nu}{}_{\beta} - g^{\nu}{}_{\alpha}g^{\mu}{}_{\beta})$ を使って付録 (23) から計算できる．ただし場の方程式 (3) を利用する．

$$\Theta_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} - F_\mu{}^\rho F_{\nu\rho} - \frac{1}{2}\{\partial_\mu B, A_\nu\}$$
$$-\frac{1}{2}\{\partial_\nu B, A_\mu\} + g_{\mu\nu}\left(\partial^\rho B \cdot A_\rho - \frac{1}{2}\alpha B^2\right) \tag{27}$$

で与えられる．もちろん $\Theta_{00} = \mathscr{H}_{EM}$ である．(27) から 2-4 c と同じように，Poincaré 群の generator P_μ と $M_{\mu\nu}$ を構成することができる．

3-3 d　*E* 関数　$B(x)$ は d'Alembert 方程式を満たすが，$A_\mu(x)$ の方は $\alpha=1$ を除いてはそうではなく，(8) のように d'Alembert 演算子を 2 回掛けなければ 0 にならない．それゆえ $D(x)$ のほかに

$$\Box^2 E(x) = 0 \tag{28}$$

を満足し，かつ $x^2<0$ で 0 になるような Lorentz 不変な超関数 $E(x)$ が必要になってくる．これは

$$E(x) \equiv -(\partial/\partial m^2)\Delta(x;\, m^2)|_{m=0} \tag{29}$$

によって定義される．その具体的な形は 2-6 の (3), (21) から

$$E(x) = -i(2\pi)^{-3}\int d^4p\, \epsilon(p_0)\delta'(p^2) e^{-ipx}$$
$$= -(8\pi)^{-1}\epsilon(x_0)\theta(x^2) \tag{30}$$

である．(30) から次の性質は直ちに証明できる．

$$\Box E(x) = D(x) \tag{31}$$
$$E(0, \boldsymbol{x}) = \dot{E}(0, \boldsymbol{x}) = \ddot{E}(0, \boldsymbol{x}) = 0 \tag{32}$$
$$\dddot{E}(0, \boldsymbol{x}) = -\delta(\boldsymbol{x}) \tag{33}$$

(30) に示されるように，$E(x)$ の Fourier 変換が $\delta'(p^2)$ という測度でない超関数を含むことは重大な意味をもつ．このようなものが現われるのは，不定計量の Hilbert 空間を使った理論でのみ可能である．

なお，あとの計算の便宜上，2-6 で与えた $D(x)$ に関する公式を再録しておこう．

$$D(x) = -i(2\pi)^{-3}\int d^4p\, \epsilon(p_0)\delta(p^2) e^{-ipx}$$
$$= -(2\pi)^{-1}\epsilon(x_0)\delta(x^2) \tag{34}$$
$$\Box D(x) = 0 \tag{35}$$
$$D(0, \boldsymbol{x}) = 0 \tag{36}$$
$$\dot{D}(0, \boldsymbol{x}) = -\delta(\boldsymbol{x}) \tag{37}$$

3-3 e　4 次元交換関係　(5) を積分形で

$$B(x) = \int d^3z [\partial^z{}_0 D(x-z)\cdot B(z) - D(x-z)\partial_0 B(z)]$$

$$\equiv \int d^3z\, D(x-z)\overleftrightarrow{\partial^z}_0 B(z) \tag{38}$$

のように書くことができる*. なぜならば, 右辺を z_0 について微分したものは (35) を使うと

$$\int d^3z[\Delta D(x-z)\cdot B(z)-D(x-z)(\partial_0)^2 B(z)] \tag{39}$$

と書けるが, 第1項で部分積分し (5) を用いると (39) は 0 になることがわかる. したがって, (38) の右辺は z_0 に依存しない. そこで, とくに $z_0=x_0$ とおくと, (37), (36) により (38) の成立することが確かめられる. (証明終)

(38) の表示では z_0 は任意であるから, $B(x)$ と $B(y)$ の4次元交換関係は $z_0=y_0$ とおけば同時刻交換関係を使って計算できるわけである. (18) と (21) から

$$[B(x),\ B(y)]=0 \tag{40}$$

を得る. 同様に (16), (20), (14), (13) を用いると,

$$[A_\mu(x),\ B(y)]=-[B(x),\ A_\mu(y)]=-i\partial^x{}_\mu D(x-y) \tag{41}$$

が得られる.

(8) は (29) で導入した $E(x)$ を用いると,

$$A_\mu(x)=\int d^3z[D(x-z)\overleftrightarrow{\partial^z}_0 A_\mu(z)+E(x-z)\overleftrightarrow{\partial^z}_0\Box A_\mu(z)] \tag{42}$$

のように積分形で書くことができる. 証明の手順は (38) のときと同様で, まず右辺が z_0 に依存しないことを (35), (31) および (8) を用いて示し, 次に $z_0=x_0$ とおき (37), (36), (32) を用いて (42) の成立を確かめればよい. (42) は (6) を用いると

$$A_\mu(x)=\int d^3z[D(x-z)\overleftrightarrow{\partial^z}_0 A_\mu(z)+(1-\alpha)E(x-z)\overleftrightarrow{\partial^z}_0\partial_\mu B(z)] \tag{43}$$

と書き直すことができる.

(43) で $z_0=y_0$ とおけば, 前と同様にして $A_\mu(x)$ と $A_\nu(y)$ の4次元交換関係を計算できる. その結果は

$$[A_\mu(x),\ A_\nu(y)]=-ig_{\mu\nu}D(x-y)+i(1-\alpha)\partial^x{}_\mu\partial^x{}_\nu E(x-y) \tag{44}$$

である(演習問題3.1参照).

3-3 f 運動量表示の困難 $\alpha\neq 1$ のときは, $A_\mu(x)$ は d'Alembert 方程式を満たさないから, 普通のように3次元的な運動量表示ができない.

---

* 記号 $\overleftrightarrow{\partial}_0$ は $f\overleftrightarrow{\partial}_0 g\equiv(\partial_0 f)g-f\partial_0 g$ で定義される(符号に注意).

なぜなら，$\exp\mp i(|\boldsymbol{p}|x_0-\boldsymbol{px})$ の重ね合せは自動的に d'Alembert 方程式を満たしてしまうからである．もちろん4次元的な運動量表示

$$A_\mu(x)=(2\pi)^{-3/2}\int d^4p\,\theta(p_0)[a_\mu(p)e^{-ipx}+a_\mu{}^\dagger(p)e^{ipx}] \tag{45}$$

ならば可能であるが，この場合は $A_\mu(x)$ が (8) を満足するので，$a_\mu(p)$ は $p^2=0$ の近傍だけが意味があるというふうな奇妙な付帯条件をつけなければならないことになる．少なくとも (45) では $p^2\neq0$ のところをどう解釈すべきかが指示されていないから，これだけでは不完全である．この点を明確にして $a_\mu(p)$ をきちんと定義するためには少し準備が必要である．

なお，もちろん $B(x)$ と $\alpha=1$ の場合の $A_\mu(x)$ については，3次元的な運動量表示が可能である．しかし統一的なとり扱いをするために，これらも4次元的運動量表示に移行させた方が便利である．

3-3 g　$E^{(\pm)}$ 関数　2-6 の (14) により D 関数は

$$iD(x)=D^{(+)}(x)+D^{(-)}(x) \tag{46}$$

のように，正エネルギー部分 $D^{(+)}$ と負エネルギー部分 $D^{(-)}$ とに分けられる．同じことを (30) の E 関数についても行ないたいのだが，困ったことに

$$\int d^4p\,\theta(p_0)\delta'(p^2)e^{-ipx} \tag{47}$$

という積分は $p_\mu=0$ の近傍からの寄与が対数的に発散してしまうのである（演習問題 3.2 参照）．そこでこの発散部分を切り落としたもの

$$E^{(\pm)}(x\,;\varepsilon)\equiv\pm(2\pi)^{-3}\int d^4p\,\theta(\pm p_0-\varepsilon)\delta'(p^2)e^{-ipx} \tag{48}$$

を導入する．ここに $\varepsilon>0$ であるから，もちろん $E^{(\pm)}(x\,;\varepsilon)$ は Lorentz 不変ではない超関数である．(48) に関連してやはり Lorentz 不変でない超関数

$$D^{(\pm)}(x\,;\varepsilon)\equiv\pm(2\pi)^{-3}\int d^4p\,\theta(\pm p_0-\varepsilon)\delta(p^2)e^{-ipx} \tag{49}$$

を導入しておく．

定義 (48), (49) から明らかなように，

$$\lim_{\varepsilon\to+0}D^{(\pm)}(x\,;\varepsilon)=D^{(\pm)}(x) \tag{50}$$

$$\Box D^{(\pm)}(x\,;\varepsilon)=0 \tag{51}$$

$$\Box E^{(\pm)}(x\,;\varepsilon)=D^{(\pm)}(x\,;\varepsilon) \tag{52}$$

$$iE(x)=\lim_{\varepsilon\to+0}[E^{(+)}(x\,;\varepsilon)+E^{(-)}(x\,;\varepsilon)] \tag{53}$$

$$[D^{(\pm)}(x;\varepsilon)]^* = D^{(\pm)}(-x;\varepsilon) = -D^{(\mp)}(x;\varepsilon) \tag{54}$$

$$[E^{(\pm)}(x;\varepsilon)]^* = E^{(\pm)}(-x;\varepsilon) = -E^{(\mp)}(x;\varepsilon) \tag{55}$$

である．さらに (38) や (42) の証明と全く同様にして，公式

$$\int d^3z\, D^{(\pm)}(x-z;\varepsilon)\overleftrightarrow{\partial^z}_0 D(z-y) = D^{(\pm)}(x-y;\varepsilon) \tag{56}$$

$$\int d^3z [D^{(\pm)}(x-z;\varepsilon)\overleftrightarrow{\partial^z}_0 E(z-y) + E^{(\pm)}(x-z;\varepsilon)\overleftrightarrow{\partial^z}_0 D(z-y)] \\ = E^{(\pm)}(x-y;\varepsilon) \tag{57}$$

が成立することが証明できる．

3-3 h 4 次元的運動量表示 $A_\mu(x)$ および $B(x)$ の正エネルギー部分と負エネルギー部分を

$$A_\mu{}^{(\pm)}(x;\varepsilon) \equiv -i\int d^3z [D^{(\pm)}(x-z;\varepsilon)\overleftrightarrow{\partial^z}_0 A_\mu(z) + E^{(\pm)}(x-z;\varepsilon)\overleftrightarrow{\partial^z}_0 \Box A_\mu(z)] \tag{58}$$

$$B^{(\pm)}(x) \equiv -i\int d^3z\, D^{(\pm)}(x-z)\overleftrightarrow{\partial^z}_0 B(z) \tag{59}$$

によって定義する．これらが z_0 に依存しないことは，(38) や (42) のときと同様にして示される．$A_\mu{}^{(\pm)}(x;\varepsilon)$ と $B^{(\pm)}(x)$ は，(50)〜(57) と (42), (38) からすぐわかるように次の性質をもつ．

$$A_\mu(x) = \lim_{\varepsilon\to+0}[A_\mu{}^{(+)}(x;\varepsilon) + A_\mu{}^{(-)}(x;\varepsilon)] \tag{60}$$

$$B(x) = B^{(+)}(x) + B^{(-)}(x) \tag{61}$$

$$[A_\mu{}^{(+)}(x;\varepsilon)]^\dagger = A_\mu{}^{(-)}(x;\varepsilon) \tag{62}$$

$$[B^{(+)}(x)]^\dagger = B^{(-)}(x) \tag{63}$$

$$\Box^2 A_\mu{}^{(\pm)}(x;\varepsilon) = 0 \tag{64}$$

$$\Box B^{(\pm)}(x) = 0 \tag{65}$$

$A_\mu{}^{(\pm)}(x;\varepsilon)$ は 4 次元ベクトルではないが，$B^{(\pm)}(x)$ はスカラーである．

さて，4 次元運動量の関数としての消滅演算子を

$$a_\mu(p) \equiv -i(2\pi)^{-3/2}\theta(p_0)\int d^3z [\delta(p^2)e^{ipz}\overleftrightarrow{\partial}_0 A_\mu(z) + \delta'(p^2)e^{ipz}\overleftrightarrow{\partial}_0 \Box A_\mu(z)] \tag{66}$$

$$b(p) \equiv -i(2\pi)^{-3/2}\theta(p_0)\delta(p^2)\int d^3z\, e^{ipz}\overleftrightarrow{\partial}_0 B(z) \tag{67}$$

によって定義する．ここに，$a_\mu(p)$ は 4 次元ベクトル，$b(p)$ はスカラーであることが確かめられる．(66), (67) を用いると (48)〜(51) により

$$A_\mu{}^{(+)}(x;\varepsilon) = (2\pi)^{-3/2}\int d^4p\, \theta(p_0-\varepsilon)a_\mu(p)e^{-ipx} \tag{68}$$

$$B^{(+)}(x) = (2\pi)^{-3/2}\int d^4p\, b(p)e^{-ipx} \tag{69}$$

と表わされる．(68) を (60) に代入すると，ちょうど (45) を具体的に構成したことになっている．(67) の $b(p)$ と，通常の 3 次元的運動量表示

$$B^{(+)}(x)=(2\pi)^{-3/2}\int d^3p\,(2|\boldsymbol{p}|)^{-1/2}b(\boldsymbol{p})\exp(-i|\boldsymbol{p}|x_0+i\boldsymbol{px}) \quad (70)$$

に現われる $b(\boldsymbol{p})$ とは，(70) を (69) に代入して計算してみればすぐわかるように，

$$b(p)=\theta(p_0)\delta(p^2)\sqrt{2|\boldsymbol{p}|}\,b(\boldsymbol{p}) \quad (71)$$

という関係にある．

場の方程式 (4)～(6) を用いると，

$$p^\mu a_\mu(p)=-i\alpha b(p) \quad (72)$$

$$p^2 b(p)=0 \quad (73)$$

$$p^2 a_\mu(p)=i(1-\alpha)p_\mu b(p) \quad (74)$$

という関係式が成立することが示される（演習問題 3.3 参照）．これらは形式的には，場の演算子をその正エネルギー部分でおきかえた場の方程式を 4 次元 Fourier 変換して得られる．また 4 次元交換関係 (44), (41), (40) から，$a_\mu(p)$ と $b(p)$ に対する次の交換関係が得られる．

$$[a_\mu(p),\, a_\nu{}^\dagger(q)]=-\delta^4(p-q)[g_{\mu\nu}\delta(p^2)+(1-\alpha)p_\mu p_\nu\delta'(p^2)]\theta(p_0) \quad (75)$$

$$[a_\mu(p),\, b^\dagger(q)]=i\delta^4(p-q)p_\mu\delta(p^2)\theta(p_0) \quad (76)$$

$$[b(p),\, b^\dagger(q)]=0 \quad (77)$$

3-3 i 補助条件 3-1 d で強調したように，電磁場の共変的量子化では必ず補助条件を導入しなければならない．

物理的状態すなわち確率解釈の許される状態 $|\mathrm{phys}\rangle$ とは

$$B^{(+)}(x)|\mathrm{phys}\rangle=0 \quad (78)$$

を満足する状態であると定義する．(4) からわかるように，(78) は $\alpha\neq 0$ のとき Gupta の補助条件 3-1 の (21) と同等である．また (69) により，(78) は

$$b(p)|\mathrm{phys}\rangle=0 \quad (79)$$

とも書くことができる．

(4), (6) を $|\mathrm{phys}\rangle$ ではさむと

$$\langle\mathrm{phys}|\partial^\mu A_\mu|\mathrm{phys}\rangle=0 \quad (80)$$

$$\langle\mathrm{phys}|\square A_\mu|\mathrm{phys}\rangle=0 \quad (81)$$

であるから，Maxwell 方程式は物理的状態での期待値の意味で成立する．

(26) で与えられる Hamiltonian H_{EM} の物理的状態での期待値は，$\dot{B}$

と A_0, B と A_k がそれぞれ同時刻で可換であることから，(61) と (59) を用いると

$$\langle \mathrm{phys}|H_{EM}|\mathrm{phys}\rangle=\langle \mathrm{phys}|\int d^3x\left[\frac{1}{2}\sum_{k>l}(F_{kl})^2+\frac{1}{2}\sum_{k}(F_{0k})^2\right]|\mathrm{phys}\rangle \tag{82}$$

となり，正定値である．もちろん，第1項は磁場のエネルギー，第2項は電場のエネルギーを表わす．もっと一般に，(27) から

$$\langle \mathrm{phys}|\Theta_{\mu\nu}|\mathrm{phys}\rangle=\langle \mathrm{phys}|\frac{1}{4}g_{\mu\nu}F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma}-F^{\mu\rho}F^{\nu}{}_{\rho}|\mathrm{phys}\rangle \tag{83}$$

である．

3-3 j 真空および真空期待値 真空 $|0\rangle$ は

$$A_\mu{}^{(+)}(x;\varepsilon)|0\rangle=0 \qquad (\text{すべての } \varepsilon>0 \text{ に対し}) \tag{84}$$

$$B^{(+)}(x)|0\rangle=0 \tag{85}$$

で定義される．ただし $\langle 0|0\rangle=1$ とする．(85) から，$|0\rangle$ は当然のことだが物理的状態である．(84), (85) は (68), (69) により，$p_0>0$ に対し

$$a_\mu(p)|0\rangle=0 \tag{86}$$

$$b(p)|0\rangle=0 \tag{87}$$

と書き直すこともできる．これらは $|0\rangle$ の定義が Lorentz 不変であることを示す．

真空期待値は次のように計算される．(60), (62), (84) から

$$\langle 0|A_\mu(x)A_\nu(y)|0\rangle=\lim_{\varepsilon\to+0}\langle 0|[A_\mu{}^{(+)}(x;\varepsilon),\ A_\nu(y)]|0\rangle \tag{88}$$

であるから，(58) を代入し 4 次元交換関係 (44) を用いると，

$$\begin{aligned}\langle 0|A_\mu(x)A_\nu(y)|0\rangle=\lim_{\varepsilon\to+0}\int d^3z\{&D^{(+)}(x-z;\varepsilon)\overleftrightarrow{\partial^z}_0[-g_{\mu\nu}D(z-y)\\&+(1-\alpha)\partial^y{}_\mu\partial^y{}_\nu E(z-y)]\\&+E^{(+)}(x-z;\varepsilon)\overleftrightarrow{\partial^z}_0[(1-\alpha)\partial^y{}_\mu\partial^y{}_\nu D(z-y)]\}\end{aligned} \tag{89}$$

となる．ここで (56), (57), (50) を使うと，結局

$$\begin{aligned}&\langle 0|A_\mu(x)A_\nu(y)|0\rangle\\&\quad=-g_{\mu\nu}D^{(+)}(x-y)+(1-\alpha)\lim_{\varepsilon\to+0}\partial^x{}_\mu\partial^x{}_\nu E^{(+)}(x-y;\varepsilon)\end{aligned} \tag{90}$$

を得る．ところで微分演算子 ∂_μ は運動量表示では $-ip_\mu$ であるから，被積分関数の $p_\mu=0$ のところの特異性を弱めるので，$\partial_\mu E^{(+)}(x-y;\varepsilon)$ の $\varepsilon\to+0$ の極限は存在する．それゆえ，$E^{(+)}(x)$ は必ず微分を伴ってのみ定義されるという了解のもとに，(90) を

$$\langle 0|A_\mu(x)A_\nu(y)|0\rangle = -g_{\mu\nu}D^{(+)}(x-y)+(1-\alpha)\partial^x{}_\mu\partial^x{}_\nu E^{(+)}(x-y) \quad (91)$$

と略記する.

なお, (85), (61), (59), (41), (40), (56) を用いて

$$\langle 0|A_\mu(x)B(y)|0\rangle = -\langle 0|B(x)A_\mu(y)|0\rangle = -\partial^x{}_\mu D^{(+)}(x-y) \quad (92)$$

$$\langle 0|B(x)B(y)|0\rangle = 0 \quad (93)$$

を導くことは容易である. あるいは, $\alpha \neq 0$ のときは (91) と (4) から出すこともできる.

(91)〜(93) から時間順序積の真空期待値に関し,

$$\langle 0|\mathrm{T}[A_\mu(x)A_\nu(y)]|0\rangle = -g_{\mu\nu}D_F(x-y) + (1-\alpha)\partial^x{}_\mu\partial^x{}_\nu E_F(x-y) \quad (94)$$

$$\langle 0|\mathrm{T}[A_\mu(x)B(y)]|0\rangle = -\langle 0|\mathrm{T}[B(x)A_\mu(y)]|0\rangle = -\partial^x{}_\mu D_F(x-y) \quad (95)$$

$$\langle 0|\mathrm{T}[B(x)B(y)]|0\rangle = 0 \quad (96)$$

が導かれる*. ただし

$$\begin{aligned} E_F(x) &\equiv -(\partial/\partial m^2)\Delta_F(x\,;\,m^2)|_{m=0} \\ &= \theta(x_0)E^{(+)}(x)-\theta(-x_0)E^{(-)}(x) \\ &= \frac{-i}{(2\pi)^4}\lim_{\varepsilon\to+0}\int d^4p\frac{e^{-ipx}}{(-p^2-i\varepsilon)^2} \end{aligned} \quad (97)$$

はそれ自身は発散だが, その微分は意味をもつ.

3-3 k 1 光子状態 p_μ $(p_0>0)$ という 4 次元運動量をもつ光子 1 個の状態は, $a_\mu{}^\dagger(p)|0\rangle$ と $b^\dagger(p)|0\rangle$ の 5 つであるが, (72) により

$$p^\mu a_\mu{}^\dagger(p)|0\rangle = i\alpha b^\dagger(p)|0\rangle \quad (98)$$

という関係があるから, 独立なものは 4 つである. 簡単のため $p_1=p_2=0$ という座標系で考え, 1 光子状態として

$$|p,\,T_j\rangle \equiv a_j{}^\dagger(p)|0\rangle \qquad (j=1,\,2) \quad (99)$$

$$|p,\,L\rangle \equiv a_3{}^\dagger(p)|0\rangle \quad (100)$$

$$|p,\,S\rangle \equiv b^\dagger(p)|0\rangle \quad (101)$$

の 4 つをとる. $|p,\,T_j\rangle$ $(j=1,\,2)$ は ♦ヨコ波光子 (transverse photon), $|p,\,L\rangle$ は ♦タテ波光子 (longitudinal photon), $|b,\,S\rangle$ は ♦スカラー光子 (scalar photon) の状態である. (73)〜(77) により次の式が得られる.

$$p^2|p,\,T_j\rangle = p^2|p,\,S\rangle = 0 \quad (102)$$

$$p^2|p,\,L\rangle = -i(1-\alpha)p_3|p,\,S\rangle \quad (103)$$

---

* θ 関数と ∂_0 との順序交換からでるおつりの部分は (32), (36) のためおちる.

$$\langle q,\, T_k | p,\, T_j\rangle=\delta_{kj}\delta^4(q-p)\delta(p^2) \tag{104}$$

$$\langle q,\, L | p,\, L\rangle=\delta^4(q-p)[\delta(p^2)-(1-\alpha)p_3{}^2\delta'(p^2)] \tag{105}$$

$$\langle q,\, T_j | p,\, L\rangle=\langle q,\, T_j | p,\, S\rangle=\langle q,\, S | p,\, S\rangle=0 \tag{106}$$

$$\langle q,\, S | p,\, L\rangle=-i\delta^4(q-p)p_3\delta(p^2) \tag{107}$$

$$b(q)|p,\, T_j\rangle=b(q)|p,\, S\rangle=0, \quad b(q)|p,\, L\rangle\neq 0 \tag{108}$$

以上を整理して言葉でいうと次のようになる*. ヨコ波光子は, $p^2=0$ を満たし, 正ノルムをもち, 他の光子の状態とは直交するような物理的状態である. タテ波光子は, $\alpha\neq 1$ ならば $p^2=0$ を正確には満たしておらず, ノルムも定符号でない. また $\alpha=1$ のときも含めてつねにスカラー光子の状態とは直交しない非物理的状態である**. スカラー光子は, $p^2=0$ を満たし, ゼロノルムをもち, タテ波光子とは直交しないが, 物理的状態である. (103) はタテ波光子の状態が平行移動の generator P_μ の 2 乗 P^2 の固有状態でなく, 3-2 e で説明した dipole ghost であることを示している. このように, Feynman ゲージ ($\alpha=1$) の場合以外では, dipole ghost が必要になるのである. しかし, dipole ghost は上述のように非物理的状態であって現実には出現しない. つまり dipole ghost はうまく閉じこめられているといえる. スカラー光子の方は物理的状態であるが, ノルムがゼロということのために, 確率解釈に従えば決して観測にかからない. これは Coulomb 力の量子が決して観測されないことに対応する. つまり Coulomb 力はスカラー光子によって近接作用として記述されるわけである.

3-31 ゲージ変換 Lagrangian 密度 (1) および量子化は c 数のゲージ変換

$$A_\mu'(x)=A_\mu(x)+\partial_\mu\Lambda(x) \tag{109}$$

$$B'(x)=B(x) \tag{110}$$

に対して不変である. ただし, $\Lambda(x)$ は

$$\Box\Lambda(x)=0 \tag{111}$$

を満足する c 数関数であるとする.

ゲージ・パラメーター α の値を変えようとすると, q 数のゲージ変換を行なう必要がある. もし $\hat{\Lambda}(x)$ が

---

* ノルムは $\int d^4p f(p)|p,\, T_j\rangle$ などについて考えてみればよい.

** $\alpha=1$ のときは正ノルムだが, それでも非物理的状態である.

$$\square\hat{\Lambda}=B \tag{112}$$

を満足する演算子であったとすると，(109) の代りに

$$A_\mu{}'=A_\mu+(\alpha-\alpha')\partial_\mu\hat{\Lambda} \tag{113}$$

とすれば，$A_\mu{}'$, B' の満たす場の方程式 (4)〜(6) は，α をすべて α' におきかえたものになることはすぐ確かめられる*.

(112) の解として

$$\hat{\Lambda}(x)\equiv\frac{1}{2}\Delta^{-1}\left[x_0\partial_0B(x)-\frac{1}{2}B(x)\right] \tag{114}$$

をとると，4 次元交換関係の方も α を α' に変えた式が成立することは，(30) から導かれる関係式 (演習問題 3.4 参照)

$$E(x)=\frac{1}{2}\Delta^{-1}[x_0\partial_0D(x)-D(x)] \tag{115}$$

を用いて確かめられる.

このように一応形式的には q 数のゲージ変換により α の値を変えることができるようにみえるが，(114) の $\hat{\Lambda}(x)$ の定義は明らかに Lorentz 不変性を破っていることに注意しなければならない．したがって，A_μ が 4 次元ベクトルならば $A_\mu{}'$ はそうはならないわけで，理論の明白な共変性が失われてしまう．このことはたまたま (114) という解をとったからなのではなく，実際に (112) を満たすスカラーの解は存在しないのである．このことを理解するには，たとえば $\hat{\Lambda}$ により $|0\rangle$ から作られる 1 粒子状態を考えてみると，それは dipole ghost でなければならないが，他方唯一の dipole ghost であるタテ波光子はスカラーではないことに注意すればよいだろう．相対論的に共変な場の量子論としては，α のそれぞれの値に対して相異なる不定計量の Hilbert 空間 $\mathfrak{V}_\alpha$ が対応しているわけで，その 1 つの空間 $\mathfrak{V}_\alpha$ の上で定義された演算子を使って $\mathfrak{V}_\beta$ $(\beta\neq\alpha)$ に移行することは，論理的に不可能なのである.

q 数のゲージ変換を遂行しようとすれば，$\hat{\Lambda}$ に対応する自由度を新たにもち込み，直和空間 $\bigoplus_\alpha\mathfrak{V}_\alpha$ を含む大きな空間での量子論を作ればよい．これには，G, C という 2 つの中性スカラー場を導入して，(1) の代りに

$$\mathcal{L}_{EM}=-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}+B\partial^\mu A_\mu-\partial^\mu G\partial_\mu C-\frac{1}{2}\epsilon(C+\gamma B)^2 \tag{116}$$

という Lagrangian 密度を採用して，正準量子化をやればよいことがわ

* しかし $\mathcal{L}_{EM}$ の方はそうはなっていない.

かっている．ただし，$\epsilon=\pm 1$ で，ゲージ・パラメーターは

$$\alpha \equiv \epsilon\gamma^2 \tag{117}$$

で与えられる．場 G の量子は ♦gaugeon と呼ばれている．

(116) から導かれる場の方程式は，

$$\Box A_\mu - \partial_\mu \partial^\nu A_\nu - \partial_\mu B = 0 \tag{118}$$

$$\partial^\mu A_\mu - \epsilon\gamma(C+\gamma B) = 0 \tag{119}$$

$$\Box C = 0 \tag{120}$$

$$\Box G - \epsilon(C+\gamma B) = 0 \tag{121}$$

で，これらと作用積分 $\int d^4x \mathcal{L}_{EM}(x)$ は，ゲージ変換

$$A_\mu' = A_\mu - (\gamma-\gamma')\partial_\mu G \tag{122}$$

$$B' = B \tag{123}$$

$$G' = G \tag{124}$$

$$C' = C + (\gamma-\gamma')B \tag{125}$$

により，$\alpha'=\epsilon\gamma'^2$ の式に移される．したがって，gaugeon によるゲージ変換では α の符号は決して変えられない．

α の異なる値に対する A_μ を同時に論じたいときには，どうしても(116) の $\mathcal{L}_{EM}$ にまで拡張して考える必要がある．6 章で述べるように，くりこみの操作を行なうと一般に α の値が変化してしまうので，明白な共変性を保ったままこのゲージの変化を消去したいときには必ずこの形式を用いなければならない．ただし $\alpha=0$ の場合だけは例外で，くりこみにさいして α の値が変わらないのでゲージの変化による問題は全く起こらない．この意味において Landau ゲージの場合が最も都合がよいわけである．

3-4 荷電場との相互作用

1-5 c で説明したように，電磁場は荷電場と非常に規則的普遍的な相互作用をする．それは，その相互作用の形がゲージ不変性の要請によりほとんど一意的に決まってしまうからである．

3-4 a 荷電場 電荷をもつ粒子の場（狭義の荷電場）は，複素場である（逆は必ずしも成立しない）．Hermite 性の要請から，その自由場の Lagrangian 密度はつねに双一次形式になっているから，♦相変換 (phase transformation) に対して不変である．たとえば，2-4 g の荷電スカラー

場では

$$\phi'=e^{i\theta}\phi, \qquad \phi'^{\dagger}=\phi^{\dagger}e^{-i\theta} \tag{1}$$

2-5 のスピノル場では

$$\psi'=e^{i\theta}\psi, \qquad \bar{\psi}'=\bar{\psi}e^{-i\theta} \tag{2}$$

という変換に対し Lagrangian 密度は不変になっている．いくつかの場が相互作用している場合には，相互作用 Lagrangian 密度に対しても相変換の不変性を要請するには，各粒子の場の相変換の相対的な符号と大きさを指定する必要がある．これをそれぞれの場の電荷の比に一致させたときの相変換のことを ♦第1種ゲージ変換と呼ぶ．Lagrangian 密度 $\mathcal{L}(x)$ は相互作用をも含めて第1種ゲージ変換に対し不変であることを要請する．

3-4 b 保存電流

[♦Noether (ネーター) の定理*] $\mathcal{L}(x)$ が第1種ゲージ変換に対し不変ならば，必ず ♦保存電流 (conserved current) $j_\mu(x)$ が存在する．すなわち，$j_\mu(x)$ は場の演算子の多項式として定義される4次元ベクトルの Hermite 演算子で，保存則

$$\partial^\mu j_\mu(x)=0 \tag{3}$$

を満足する．

この定理は本来は古典力学の定理であるので，量子論ではその証明は形式的である．

荷電場をボソン，フェルミオンの区別なしに $\varphi_j(x)$ $(j=1, 2, \cdots, n)$ で表わし，その電荷をそれぞれ電子の荷電 e を単位として N_j であるとする．電荷をもたない複素場は $N_j=0$ と思えばよい．$\mathcal{L}$ が無限小の第1種ゲージ変換

$$\varphi_j'=(1+ieN_j\delta\theta)\varphi_j \tag{4}$$

に対し不変なことを式で書くと，

$$0=\delta\mathcal{L}\equiv ie\sum_{j=1}^{n}N_j\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_j}\varphi_j+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_j)}\partial_\mu\varphi_j-\varphi_j^{\dagger}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_j^{\dagger}}-\partial_\mu\varphi_j^{\dagger}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_j^{\dagger})}\right]\delta\theta \tag{5}$$

である．変分原理 $\delta\int d^4x\,\mathcal{L}=0$ から従う場の方程式は(付録参照)

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_j}-\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_j)}=0, \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_j^{\dagger}}-\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_j^{\dagger})}=0 \tag{6}$$

---

* Noether の定理は，一般的には，$\int d^4x\,\mathcal{L}(x)$ の連続変換に対する不変性から保存則の従うことをいう．

であるから，これを(5)に代入すると

$$ie\sum_{j=1}^{n}N_j\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_j)}\varphi_j-\varphi_j^\dagger\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_j^\dagger)}\right]=0 \qquad (7)$$

を得る．それゆえ電流を

$$j^\mu(x)\equiv ie\sum_{j=1}^{n}N_j\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_j)}\varphi_j-\varphi_j^\dagger\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_j^\dagger)}\right] \qquad (8)$$

で定義すれば，それは(3)を満足する．その Hermite 性と4次元ベクトルであることは(8)から明らかである．(証明終)

もちろん $j_\mu(x)$ は超関数的な場の演算子の同時空点での積として表わされているのだから，数学的にはきちんと定義されているとはいえない．そのため形式的議論と具体的な計算とが一致しないことが起こるので，矛盾を避けるようつねに注意しなければならない．

保存電流が見つかったので，電磁場との相互作用は一見 $\mathcal{L}$ に $-j^\mu A_\mu$ をつけ加えればよいように思われるが，それは正しくない．なぜなら，上の証明での $\mathcal{L}$ は電磁場までも含めた全系の Lagrangian 密度でなければならないから，あとから $-j^\mu A_\mu$ を勝手につけ加えると，もはや上の定理の j^μ とこの j^μ とは同一のものではないのである．すなわち電磁場を入れるまえに作った j_μ と電磁場を入れてから作った j_μ とは一般には必ずしも一致しないことに注意を要する．

3-4 c　電荷演算子　電流の保存則(3)により ♦電荷演算子(charge operator) Q を

$$Q\equiv\int d^3x\, j_0(x) \qquad (9)$$

で定義すると，これは x_0 に依存しない．実際

$$\partial_0 Q=\int d^3x\,\partial_0 j_0(x)=\int d^3x\sum_k\partial_k j_k(x)=0 \qquad (10)$$

である．系の Hamiltonian を H とすれば，(10)は

$$[Q, H]=0 \qquad (11)$$

と書ける．また(9)から，Q は Lorentz 不変量である*．Q の定義は，正準変数を使って書くと

$$Q=ie\sum_{j=1}^{n}N_j\int d^3x[\pi_j(x)\varphi_j(x)-\varphi_j^\dagger(x)\pi_j^\dagger(x)] \qquad (12)$$

---

* このことは古典論(相対論)で周知である．$\int d^3x\, j_0(x)$ を任意の2つの座標系で書いたものの差は $\partial^\mu j_\mu(x)$ の4次元積分で書けることにより示される．

であるから，正準交換関係により

$$[Q,\ \varphi_j(x)]=eN_j\varphi_j(x) \tag{13}$$

$$[Q,\ \varphi_j{}^\dagger(x)]=-eN_j\varphi_j{}^\dagger(x) \tag{14}$$

を得る．これを (4) と比較すれば，Q は第 1 種ゲージ変換の generator であることがわかる．

3-4 d 第 2 種ゲージ変換 第 1 種ゲージ変換では相 θ は常数であったが，今度はそれを各時空点 x_μ の関数 $\Lambda(x)$ とした場合を考え，それを ♦第 2 種ゲージ変換と呼ぶ．場の量子論では，この場合原理的に $\Lambda(x)$ が c 数である場合と q 数である場合とがあるわけだが，以下の議論ではどちらでも本質的に同じことである．ただし簡単のため $\Lambda(x)$ と $\partial_\mu\Lambda(x)$ とは可換と仮定する．

第 2 種ゲージ変換のときは，第 1 種のときとの違いは要するに $\Lambda(x)$ が微分演算子 ∂_μ と可換でないということだけである．すなわち

$$\varphi_j{}'(x)=\exp[iN_je\Lambda(x)]\varphi_j(x) \tag{15}$$

とするとき，

$$\partial_\mu\varphi_j{}'(x)=\exp[iN_je\Lambda(x)]\{\partial_\mu+iN_je[\partial_\mu\Lambda(x)]\}\varphi_j(x) \tag{16}$$

であるから，$\mathcal{L}$ は $\partial_\mu\Lambda$ を含む部分だけ不変性が破れる．そこで電磁場 A_μ がゲージ変換

$$A_\mu{}'(x)=A_\mu(x)+\partial_\mu\Lambda(x) \tag{17}$$

をするものとすれば，

$$[\partial_\mu-iN_jeA_\mu(x)]\varphi_j(x) \tag{18}$$

は (15) と同様な変換をすることがわかる．電磁場を含まない第 1 種ゲージ不変な Lagrangian 密度が与えられたとき，その中の $\partial_\mu\varphi_j(x)$ をすべて (18) でおきかえれば第 2 種ゲージ不変な Lagrangian 密度が得られる．これを $\hat{\mathcal{L}}$ と書くとき，全系の Lagrangian 密度は $\mathcal{L}=\hat{\mathcal{L}}+\mathcal{L}_{EM}$ で与えられる．

上述のような方法によって得られる電磁場の相互作用を ♦極小相互作用 (minimal interaction) という．∂_μ と A_μ とが同じ次元 $[L^{-1}]$ をもつので，もし出発点の Lagrangian 密度が第 1 種相互作用のみを含むならば，極小相互作用はやはり第 1 種相互作用である．

極小相互作用にさらに第 2 種ゲージ不変な相互作用をつけ加えることは可能である．たとえば

$$i\bar{\psi}\frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu-\gamma^\nu\gamma^\mu)\psi F_{\mu\nu} \tag{19}$$

のような ♦Pauli 項をつけ加えることはできる．しかしながら，(19) は第2種相互作用であり，かつ実験的にも Pauli 項の存在は否定されている．

極小相互作用のときは，保存電流 (8) は

$$j^\mu(x)=-\partial\hat{\mathcal{L}}(x)/\partial A_\mu(x) \tag{20}$$

と書くこともできる．これは極小相互作用の定義により，$\partial_\mu\varphi_j$ がつねに (18) のような形でしか含まれないことから直ちに導かれる．

以下電磁場の相互作用は，電磁場を入れるまえの Lagrangian 密度が微分結合を含まず，それから極小相互作用として出てくるもののみであると仮定する．この場合は相互作用の形は自由場の Lagrangian 密度から一意的に決定される．実際，電荷 e をもつスカラー場 ϕ とスピノル場 ψ がそれぞれ単独にある場合については，2–4 の (51) と 2–5 の (21) から，自由場の部分をも含めた Lagrangian 密度 $\hat{\mathcal{L}}$ として

$$(\partial^\mu+ieA^\mu)\phi^\dagger\cdot(\partial_\mu-ieA_\mu)\phi-\mu_0{}^2\phi^\dagger\phi \tag{21}$$

および

$$-\bar{\psi}(-i\gamma^\mu\partial_\mu+m_0-e\gamma^\mu A_\mu)\psi \tag{22}$$

が得られる．したがって，それぞれの場合の j_μ は，(20) により

$$j_\mu=ie(\partial_\mu\phi^\dagger\cdot\phi-\phi^\dagger\partial_\mu\phi)-2e^2A_\mu\phi^\dagger\phi \tag{23}$$

および

$$j_\mu=-e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi \tag{24}$$

となる．(23) の場合は j_μ が A_μ を含んでいることに注意を要する．

3–4 e 荷電共役 ♦荷電共役は 1–5 d で説明したように粒子を反粒子に移す変換であるが，もちろんこの言葉の起こりは粒子の電荷を逆にする変換という意味である．したがって荷電共役は Q と反可換な unitary 演算子である．この演算子を具体的に構成する必要はなく，その作用の結果として場の演算子がどのように変わるかを知ればよい．複素スカラー場については明らかに荷電共役により ϕ と $\phi^\dagger$ とが入れかわる．スピノル場のときは4つの成分をもつから事情が少し複雑になる．

荷電共役により ψ は

$$\psi'=C\bar{\psi}^T \tag{25}$$

に写されるとする．ここに T は転置(transposed)を表わし，C は常数から成る4次の正方行列を表わす．T をとる理由は，ψ は成分がタテに並ん

だもの，$\bar{\psi}$ は成分がヨコに並んだものと約束しているからである．行列 C を入れるのは，成分間で適当な一次結合をとり直した方が具合よいからである．

Lagrangian 密度 (22) から導かれる場の方程式は

$$(-i\gamma^\mu\partial_\mu+m_0-e\gamma^\mu A_\mu)\psi=0 \tag{26}$$

であるから，C は

$$(-i\gamma^\mu\partial_\mu+m_0+e\gamma^\mu A_\mu)\psi'=0 \tag{27}$$

となるように決定する．(25) を (27) に代入して，$\bar{\psi}$ の方程式

$$[+i(\gamma^\mu)^T\partial_\mu+m_0-e(\gamma^\mu)^TA_\mu]\bar{\psi}^T=0 \tag{28}$$

と比較すれば，

$$C^{-1}\gamma^\mu C=-(\gamma^\mu)^T \tag{29}$$

であることがわかる．2-5 の (6) のガンマ行列の表示に対しては，

$$C=\begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \tag{30}$$

ととれば (29) が満たされることが確かめられる．

なお，荷電共役 (25) に対応して

$$\bar{\psi}'=-\psi^TC^{-1} \tag{31}$$

である．マイナスがつくのは ψ が Fermi 統計に従うからで，自由場の Lagrangian 密度と正準反交換関係は (25), (31) の変換で不変に保たれる*. 理論全体はこれと同時に A_μ と B の符号も変えれば不変に保たれる．これが荷電共役不変性である．

3-5 Heisenberg 表示での電磁場

2-8 ではスカラー場の Heisenberg 演算子 $\phi(x)$ の一般的性質を調べた．本節では極小相互作用をしている Heisenberg 演算子 $A_\mu(x)$ と $B(x)$ の一般的性質を調べる．

3-5 a Heisenberg 方程式 Lagrangian 密度 $\mathcal{L}$ が 3-3 の (1) の $\mathcal{L}_{EM}$ と 3-4 d で構成した第2種ゲージ不変な $\hat{\mathcal{L}}$ との和で与えられるとする．このとき A_μ と B の従う Heisenberg 方程式は，

---

* 反交換子からの寄与もおとすには $\mathcal{L}$ の中の $\bar{\psi}_\alpha\psi_\beta$ を $\frac{1}{2}[\bar{\psi}_\alpha, \psi_\beta]$ と読みかえておけばよい．

$$\Box A_\mu - \partial_\mu \partial^\nu A_\nu - \partial_\mu B = j_\mu \tag{1}$$

$$\partial^\mu A_\mu + \alpha B = 0 \tag{2}$$

である．(1) は (2) を代入すれば

$$\Box A_\mu - (1-\alpha)\partial_\mu B = j_\mu \tag{3}$$

となる．電流の保存則 3-4 の (3) のおかげで，(1) に ∂^μ を掛けると

$$\Box B = 0 \tag{4}$$

となるから，B は自由場の場合と同じ方程式を満足する．もちろんこのことは 2-7 e でも注意したように Heisenberg 演算子の B が自由場理論での B と同じものだということでは決してない．たまたま同じ形の方程式を満たすというだけである．しかし，$B(x)$ が自由場の方程式を満たすということは，電磁場の理論構成にとって極めて重要な事柄である．(4) のおかげで 3-3 の (59) と全く同じ形の式で $B^{(\pm)}(x)$ が定義できるから，Heisenberg 表示においては，相互作用が存在するときでも補助条件は

$$B^{(+)}(x)|\mathrm{phys}\rangle = 0 \tag{5}$$

ととることができる．これに対し $A_\mu(x)$ の方はもはやその正エネルギー部分を Lorentz 共変に定義することはできない．

物理的状態での Heisenberg 方程式 (3), (2) の期待値は，もちろん電流の存在する場合の Maxwell 方程式 1-3 の (12), (14) を再現する．物理的状態のノルムが負にならないことは後述の漸近場を使って示せる．

3-5 b　4 次元交換関係　$\hat{\mathcal{L}}$ は A_μ の微分を含まないから，同時刻交換関係は自由場の場合の 3-3 の(13)〜(18)と同形である．また 3-3 の(19)はそのままであるが，3-3 の (20) は (1) の第 0 成分から導かれる式

$$\dot{B} = \sum_k \partial_k \dot{A}_k - \Delta A_0 - j_0 \tag{6}$$

におきかわる．しかし，j_0 は 3-4 の (12) の被積分関数を見ればわかるように，荷電場に関する正準変数 φ_j, $\varphi_j{}^\dagger$, π_j, $\pi_j{}^\dagger$ のみで表わされるから，同時刻で A_μ, $\dot{A}_\mu$, B とは可換である．それゆえ，B の関係した 4 次元交換関係 3-3 の (40), (41) は相互作用のあるときにもそのまま成り立つ．すなわち，

$$[B(x),\ B(y)] = 0 \tag{7}$$

$$[A_\mu(x),\ B(y)] = -[B(x),\ A_\mu(y)] = -i\partial^x{}_\mu D(x-y) \tag{8}$$

である．(7), (8) と (3) から

$$[B(x),\ j_\mu(y)] = 0 \tag{9}$$

を得る．しかし j_0 は任意の荷電場 φ_j の正準変数とは可換でないので，一般に 3-4 の (8) により

$$[\dot{B}(x_0, \boldsymbol{x}),\ \varphi_j(x_0, \boldsymbol{y})] = -[j_0(x_0, \boldsymbol{x}),\ \varphi_j(x_0, \boldsymbol{y})]$$
$$= -eN_j\varphi_j(x_0, \boldsymbol{y})\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \qquad (10)$$

である．B の積分表示式 3-3 の (38) を用いて 4 次元交換関係を計算すると，電荷 e をもつスカラー場 $\phi(x)$ に対し

$$[B(x),\ \phi(y)] = e\phi(y)D(x-y) \qquad (11)$$
$$[B(x),\ \phi^{\dagger}(y)] = -e\phi^{\dagger}(y)D(x-y) \qquad (12)$$

電荷 e をもつスピノル場 $\psi(x)$ に対し

$$[B(x),\ \psi(y)] = e\psi(y)D(x-y) \qquad (13)$$
$$[B(x),\ \bar{\psi}(y)] = -e\bar{\psi}(y)D(x-y) \qquad (14)$$

を得る．

3-5 c 真空期待値 真空 $|0\rangle$ は 2-2 の (18), (19) と $\langle 0|0\rangle=1$ を満たすような物理的状態であるとする．また 2-8 a で述べたように

$$\langle 0|A_{\mu}(x)|0\rangle=0, \qquad \langle 0|B(x)|0\rangle=0 \qquad (15)$$

を仮定する．ただし後者の方は $|0\rangle$ が補助条件を満足することから自動的にでてくる．

(5) により任意の $\Phi(y)$ に対し

$$\langle 0|B(x)\Phi(y)|0\rangle = \langle 0|[B^{(+)}(x),\ \Phi(y)]|0\rangle \qquad (16)$$

であるから，(7)〜(9) から直ちに

$$\langle 0|B(x)B(y)|0\rangle=0 \qquad (17)$$
$$\langle 0|A_{\mu}(x)B(y)|0\rangle = -\langle 0|B(x)A_{\mu}(y)|0\rangle = -\partial^{x}{}_{\mu}D^{(+)}(x-y) \qquad (18)$$
$$\langle 0|B(x)j_{\mu}(x)|0\rangle=0 \qquad (19)$$

が得られる．

2-8 c でやったように $\langle 0|A_{\mu}(x)A_{\nu}(y)|0\rangle$ を計算しようとすると，完全系をはさむさい 3-2 e で指摘したように dipole ghost に対する射影演算子が複雑であるから注意を要する．この射影演算子を具体的に構成するには漸近場の知識が必要なので，今の段階では利用できない．しかし，幸いにして次のような方法を用いると，この射影演算子を知らなくても $\langle 0|A_{\mu}(x)A_{\nu}(y)|0\rangle$ のスペクトル表示を求めることができる．

まず (9) により $j_{\nu}(y)|0\rangle$ は補助条件 (5) を満たすから物理的状態であることに注意する．それゆえ，$\langle 0|j_{\mu}(x)j_{\nu}(y)|0\rangle$ の中間に完全系をはさむさい，3-2 f で与えた定理により正ノルムの物理的状態に関するものだけ

をとればよいから，2-8 c の議論をそのままくり返すことができる．電流の保存則 $\partial^\mu j_\mu=0$ に注意すると，

$$\langle 0|j_\mu(x)j_\nu(y)|0\rangle=-\int_0^\infty d\kappa^2\pi(\kappa^2)(\kappa^2 g_{\mu\nu}+\partial^x{}_\mu\partial^x{}_\nu)\Delta^{(+)}(x-y\,;\kappa^2) \quad (20)$$

と書けることがわかる．ただし，

$$\sum_\lambda\langle 0|j_\mu(0)|p,\lambda\rangle\langle p,\lambda|j_\nu(0)|0\rangle$$
$$=(2\pi)^{-3}\theta(p_0)(-p^2 g_{\mu\nu}+p_\mu p_\nu)\pi(p^2) \quad (21)$$

と書いた．この形は Lorentz 共変性と $p^\mu j_\mu=0$ とから決まる．また (21) の $\mu=\nu=0$ の成分から $\pi(p^2)\geqq 0$ であることが知られる．

ところで Heisenberg 方程式 (3) と (17), (19) を用いると，

$$\Box^x\Box^y\langle 0|A_\mu(x)A_\nu(y)|0\rangle=\langle 0|j_\mu(x)j_\nu(y)|0\rangle \quad (22)$$

であるから，$A_\mu(x)$ の Lorentz 共変性とエネルギーの正値性により，

$$\langle 0|A_\mu(x)A_\nu(y)|0\rangle$$
$$=(ag_{\mu\nu}+b\partial^x{}_\mu\partial^x{}_\nu)D^{(+)}(x-y)+(cg_{\mu\nu}+d\partial^x{}_\mu\partial^x{}_\nu)E^{(+)}(x-y)$$
$$-\int_{+0}^\infty d\kappa^2\,\sigma(\kappa^2)(g_{\mu\nu}+\kappa^{-2}\partial^x{}_\mu\partial^x{}_\nu)\Delta^{(+)}(x-y\,;\kappa^2) \quad (23)$$

と書けるはずである．ここに a, b, c, d は常数で，$\sigma(\kappa^2)$ は

$$\sigma(\kappa^2)\equiv\pi(\kappa^2)/\kappa^2\geqq 0 \qquad (\kappa^2>0\ \text{に対し}) \quad (24)$$

で，$\kappa^2=0$ でデルタ関数的特異性をもたないような測度である．

常数 a, b, c, d は次のようにして決定される．まず (2) と (18) により

$$c=0, \qquad a+d=-\alpha \quad (25)$$

である*．次に (23) から $\langle 0|[A_\mu(x), A_\nu(y)]|0\rangle$ のスペクトル表示を作って同時刻交換関係 3-3 の (14) と比較すると，

$$i\delta_{kl}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})=i(-a\delta_{kl}+b\partial^x{}_k\partial^x{}_l)\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$$
$$-i\int_{+0}^\infty d\kappa^2\,\sigma(\kappa^2)(-\delta_{kl}+\kappa^{-2}\partial^x{}_k\partial^x{}_l)\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \quad (26)$$

となるから，

$$a=-Z_3, \qquad b=Z_3K \quad (27)$$

を得る**．ただし，

$$Z_3\equiv 1-\int_{+0}^\infty d\kappa^2\,\sigma(\kappa^2) \quad (28)$$

---

* $\partial^y{}_\nu$ を用いるときは符号に注意．

** Z に添字 3 をつけたのは，あとでくりこみ理論において Z_1, Z_2 が現われるからである．

$$Z_3K\equiv\int_{+0}^{\infty}d\kappa^2\sigma(\kappa^2)/\kappa^2 \tag{29}$$

である．(25), (27) を (23) に代入すれば

$$\begin{aligned}\langle 0|A_\mu(x)A_\nu(y)|0\rangle\\ &=-Z_3(g_{\mu\nu}-K\partial^x{}_\mu\partial^x{}_\nu)D^{(+)}(x-y)+(Z_3-\alpha)\partial^x{}_\mu\partial^x{}_\nu E^{(+)}(x-y)\\ &\quad-\int_{+0}^{\infty}d\kappa^2\,\sigma(\kappa^2)(g_{\mu\nu}+\kappa^{-2}\partial^x{}_\mu\partial^x{}_\nu)\Delta^{(+)}(x-y\,;\kappa^2)\end{aligned} \tag{30}$$

を得る．もちろん $\sigma(\kappa^2)\equiv 0$ のときは (30) は 3-3 の (91) に還元する．

一般に，(8) により $A_\nu(y)|0\rangle$ のヨコ波部分は物理的状態であるから，(30) において $Z_3>0$ である．これと (24), (28), (29) から，$\sigma(\kappa^2)\neq 0$ のとき

$$0<Z_3<1 \tag{31}$$

$$K>0 \tag{32}$$

が得られる．Z_3 はヨコ波光子のはだかの確率と解釈できる．

3-5 d　漸近場　(30) から

$$\begin{aligned}\langle 0|[A_\mu(x),\ A_\nu(y)]|0\rangle\\ &=-iZ_3[(g_{\mu\nu}-K\partial^x{}_\mu\partial^x{}_\nu)D(x-y)-(1-Z_3{}^{-1}\alpha)\partial^x{}_\mu\partial^x{}_\nu E(x-y)]\\ &\quad-i\int_{+0}^{\infty}d\kappa^2\,\sigma(\kappa^2)(g_{\mu\nu}+\kappa^{-2}\partial^x{}_\mu\partial^x{}_\nu)\Delta(x-y\,;\kappa^2)\end{aligned} \tag{33}$$

であるから，2-8 h のように

$$A_\mu(x)\longrightarrow A^{\rm in}{}_\mu(x)\qquad(x_0\to-\infty) \tag{34}$$

で定義される漸近場 $A^{\rm in}{}_\mu(x)$ の交換関係は

$$\begin{aligned}Z_3{}^{-1}[A^{\rm in}{}_\mu(x),\ A^{\rm in}{}_\nu(y)]&=-i(g_{\mu\nu}-K\partial^x{}_\mu\partial^x{}_\nu)D(x-y)\\ &\quad+i(1-Z_3{}^{-1}\alpha)\partial^x{}_\mu\partial^x{}_\nu E(x-y)\end{aligned} \tag{35}$$

となる．これを自由場の場合の交換関係 3-3 の (44) と比較してみると，全体に Z_3 のような因子がかかることはスカラーのときと同じだが，ゲージ・パラメーター α が $Z_3{}^{-1}\alpha$ と変化し，新たに $iK\partial_\mu\partial_\nu D(x-y)$ という奇妙な項がつけ加わっていることに注意を要する．このように不定計量の場の量子論では，漸近場の満たす交換関係はたんに自由場のそれと常数因子(これはくりこみによって除かれる)だけを除いて一致するとは限らないのである*.

$B(x)$ は自由場の方程式を満たすから，漸近場は Yang-Feldman の方程式からわかるように，$B(x)$ それ自身と一致する．すなわち，

* この点に関しては従来これと少し違うふうに解釈されてきた．

$$B^{\rm in}(x)=B(x) \tag{36}$$

である．交換関係は，(7), (8) から

$$[B^{\rm in}(x),\ B^{\rm in}(y)]=0 \tag{37}$$

$$[A^{\rm in}{}_\mu(x),\ B^{\rm in}(y)]=-i\partial^x{}_\mu D(x-y) \tag{38}$$

である．$A^{\rm in}{}_\mu(x)$ と $B^{\rm in}(x)$ の満足する方程式は

$$\Box A^{\rm in}{}_\mu-(Z_3-\alpha)\partial_\mu B^{\rm in}=0 \tag{39}$$

$$\partial^\mu A^{\rm in}{}_\mu+\alpha B^{\rm in}=0 \tag{40}$$

である．

$A^{\rm out}{}_\mu(x)$, $B^{\rm out}(x)$ に関しても全く同様の式が成り立つ．

S 行列も，2-8 i と同じく電磁場の漸近場と荷電場の漸近場とから in-state$|\alpha, {\rm in}\rangle$, out-state$|\beta, {\rm out}\rangle$ を構成して，

$$S_{\beta\alpha}\equiv\langle\beta, {\rm out}|\alpha, {\rm in}\rangle \tag{41}$$

で定義する．不定計量の Hilbert 空間で考えているので，この S は通常の意味で unitary ではなく unitary 的* である．しかし補助条件は漸近場に対しても同形であるから，in-state の物理的状態の空間と out-state の物理的状態の空間とは一致する．それゆえ，$|\alpha, {\rm in}\rangle$ も $|\beta, {\rm out}\rangle$ も物理的状態のときは，3-2 f の定理により，(41) は物理的状態のみを含む Hilbert 空間 $\mathfrak{H}_{\rm phys}$ での S 行列要素となる．したがってそれは unitary である．

3-6 中性ベクトル場

電磁場は質量が 0 であるためいろいろと厄介な問題が起こるが，もし質量が 0 でない中性ベクトル場を考えると事情は一変する．今度の場合は正定値計量の Hilbert 空間で共変的に量子化することが可能である．この形式を ♦Proca(プロカ)形式という．また電磁場の Gupta-Bleuler 形式に似せてこしらえた ♦Steuckelberg(ステュッケルベルグ)形式や，その他いろいろの理論が提起されている．本節では，はじめに Proca 形式を略述し，そのあと，質量 0 の極限で Landau ゲージの電磁場に連続的に移行するような新しいベクトル場理論を解説する．

3-6 a Proca 形式 $U_\mu(x)$ をはだかの質量 $m_0\neq0$ の中性ベクトル場とするとき，Lagrangian 密度として

* 1-2 d 参照.

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_0{}^2 U^\mu U_\mu \tag{1}$$

をとる．ただし，$F_{\mu\nu}$ の定義は電磁場のときと同じく

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu U_\nu - \partial_\nu U_\mu \tag{2}$$

である．(1) から従う場の方程式は

$$\Box U_\mu - \partial_\mu \partial^\nu U_\nu + m_0{}^2 U_\mu = 0 \tag{3}$$

である．今度の場合は，微分演算子 $\Box g_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu + m_0{}^2 g_{\mu\nu}$ が ∂^μ と直交しないから，電磁場のときのような困難は起こらない．そして (3) から Lorentz 条件

$$\partial^\mu U_\mu = 0 \tag{4}$$

が自動的にでてくる．そのおかげでまた，(3) は Klein-Gordon 方程式

$$(\Box + m_0{}^2) U_\mu = 0 \tag{5}$$

に帰着する．

正準量子化は，U_k $(k=1, 2, 3)$ とその正準共役量

$$\pi_k \equiv \partial \mathcal{L}_0 / \partial \dot{U}_k = \dot{U}_k - \partial_k U_0 \tag{6}$$

について行なう．U_0 は，(3) の第 0 成分から

$$U_0 = m_0{}^{-2}(\Delta U_0 - \partial_0 \sum_k \partial_k U_k) = -m_0{}^{-2} \sum_k \partial_k \pi_k \tag{7}$$

と表わされ，また $\dot{U}_0$ は (4) により

$$\dot{U}_0 = \sum_k \partial_k U_k \tag{8}$$

と表わされるから，U_0 を正準変数として採用しなくても困難は生じない．自由場の 4 次元交換関係は

$$[U_\mu(x),\ U_\nu(y)] = -i(g_{\mu\nu} + m_0{}^{-2}\partial^x{}_\mu \partial^x{}_\nu)\Delta(x-y\,;\,m_0{}^2) \tag{9}$$

となることが証明できる（演習問題 3.7 参照）．これはもちろん (4), (5) とつじつまが合っている．

(4), (5), (9) を満足するベクトル場 U_μ を *Proca 場という．

3-6 b Proca 形式の欠点 Proca 形式は，不定計量を使わずに自動的に Lorentz 条件を出してきた点でたしかに優れている．しかし，U_0 が (7) のように π_k で表わされるため，U_k と U_0 とが同時刻で可換でないという奇妙なことが起こっている*（脚注は次頁）．このためにいろいろと不都合なことが生じてくる．

2-6 c や 2-8 c で見たように，Green 関数は $\theta(x_0 - y_0)$ のような不連続因子を導入して定義される．この因子が Lorentz 不変性と矛盾しない

ためには，同時刻からの寄与が0でないと困るのである．ところが上で述べたように U_k と U_0 とが同時刻で可換でないから，

$$\langle 0|\mathrm{T}[U_\mu(x)U_\nu(y)]|0\rangle \tag{10}$$

のような量は Lorentz 共変性を失う．実際 $\theta(x_0-y_0)$ が ∂_0 と非可換であるため，(10) は

$$-(g_{\mu\nu}+m_0^{-2}\partial^x{}_\mu\partial^x{}_\nu)\varDelta_F(x-y\,;\,m_0^2)-im_0^{-2}\delta_{\mu0}\delta_{\nu0}\delta^4(x-y) \tag{11}$$

に等しい．第2項は Lorentz 共変でない余分の項である．これを無視したものを ♦T^* 積と呼ぶ．すなわち，

$$\langle 0|\mathrm{T}^*[U_\mu(x)U_\nu(y)]|0\rangle\equiv-(g_{\mu\nu}+m_0^{-2}\partial^x{}_\mu\partial^x{}_\nu)\varDelta_F(x-y\,;\,m_0^2) \tag{12}$$

とおく．しかし，(12) の右辺は Lorentz 条件 (4) に反して ∂^μ を掛けても0にならない．Lorentz 条件というのは，U_μ のうちスピン0の部分をおとすという条件にほかならないので，それを満たさないのは (12) にはスピン0の部分が混ざっているということを意味する．

(12) はまた，運動量表示をすると，微分演算子の存在のために高エネルギー ($p_\mu\to\infty$) での振る舞いがスカラーの場合と比べて $p_\mu p_\nu$ の分だけ強くなる．このため発散の困難の処理が一般論通りいかず，特別な考察が必要となってくる．

さらに Proca 形式は，$m_0\neq0$ ということを最大限に利用しているので，$m_0\to0$ の極限を考えることができない．このため，中性ベクトル場と電磁場との関連が全く不明になってしまう．電磁場が質量0であるために起こる厄介な問題をバイパスするのに，仮想的に微小質量を導入する必要がしばしば生ずるが，Proca 形式はこの目的のためには全く役に立たないわけである．

3-6 c　Landau ゲージ形式の理論　以上述べた Proca 形式の難点は，Landau ゲージの電磁場理論に素直に質量項をもち込んだ形式を導入することによりすべて解決される．ただこの場合はもちろん不定計量の

---

*　このことは正定値計量をとる限り極めて一般的な事情である．たとえば，保存電流 j_μ についてもこれと同様なことが起こる．正準交換関係を用いて計算すると，j_μ と j_ν の同時刻交換関係はすべてゼロになる．しかし，j_k と j_0 とが同時刻で可換であるとすると，3-5 の (20) から導かれる $\langle 0|[j_k(x),\,j_0(y)]|0\rangle$ のスペクトル表示と矛盾する．これを ♦Goto(後藤)-Imamura(今村)の矛盾という．それゆえ，通常同時刻で $[j_k,\,j_0]$ は0でないとし，それを ♦Schwinger 項と呼んでいる．このようなことが起こるのは，j_μ が同時空点の場の演算子の積という数学的に正当でないものだからである．

Hilbert 空間を用いなければならない．

自由場の Lagrangian 密度は 3-3 の (1) の $\alpha=0$ の場合の自然な拡張として，

$$\mathcal{L}_0=-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}+\frac{1}{2}m_0{}^2A^\mu A_\mu+B\partial^\mu A_\mu \tag{13}$$

をとる*．ただし本節では A_μ は質量 m_0 のベクトル場を表わす．場の方程式は

$$\partial^\mu A_\mu=0 \tag{14}$$

$$(\Box+m_0{}^2)A_\mu-\partial_\mu B=0 \tag{15}$$

で，これから

$$\Box B=0 \tag{16}$$

がでる．

正準量子化は，質量項が微分を含まないゆえ，電磁場のときと全く同じになる．ただ，$\dot{B}$ の式が 3-3 の (20) の代りに

$$\dot{B}=\sum_k\partial_k\dot{A}_k-(\Delta-m_0{}^2)A_0 \tag{17}$$

となるだけである．4 次元交換関係は，(15) を積分形にした式

$$A_\mu(x)=\int d^3z\,\varDelta(x-z\,;\,m_0{}^2)\overleftrightarrow{\partial^z}_0A_\mu(z)$$
$$-m_0{}^{-2}\int d^3z[\varDelta(x-y\,;\,m_0{}^2)-D(x-y)]\overleftrightarrow{\partial^z}_0[\partial_\mu B(z)] \tag{18}$$

を用いて容易に計算できる．結果は

$$[A_\mu(x),\ A_\nu(y)]=-i(g_{\mu\nu}+m_0{}^{-2}\partial^x{}_\mu\partial^x{}_\nu)\varDelta(x-y\,;\,m_0{}^2)$$
$$+im_0{}^{-2}\partial^x{}_\mu\partial^x{}_\nu D(x-y) \tag{19}$$

となる．(19) で $m_0\to0$ の極限をとると，3-3 の (44) の $\alpha=0$ の場合が再現される．他の 4 次元交換関係は，$B(x)$ の積分表示式 3-3 の (38) を使えば直ちに

$$[A_\mu(x),\ B(y)]=-i\partial^x{}_\mu D(x-y) \tag{20}$$

$$[B(x),\ B(y)]=-im_0{}^2D(x-y) \tag{21}$$

を得る．今度の場合は $[B(x), B(y)]$ は 0 にならないで，交換関係は通常の質量 0 のスカラー場の場合と逆の符号になっている．このことは $B(x)$

---

* もちろん $\frac{1}{2}\alpha B^2$ の項を (13) につけ加えておいても同じようにやれる．しかしこのとき B の質量の 2 乗は $\alpha m_0{}^2$ となり，$\alpha<0$ のときはタキオンのようになってしまう．

が ghost に対応する演算子であることを示している.

補助条件は, (16) のおかげで電磁場の場合と全く同じく

$$B^{(+)}(x)|\mathrm{phys}\rangle=0 \tag{22}$$

とおくことができる.

(14)～(16) と (19)～(21) からすぐ確かめられるように, $m_0 \neq 0$ のとき

$$U_\mu(x)\equiv A_\mu(x)-m_0^{-2}\partial_\mu B(x) \tag{23}$$

という場を導入すると, これは $B(y)$ と可換な Proca 場にほかならない. つまり $A_\mu(x)$ は正ノルムの物理的状態に対応する $U_\mu(x)$ と, 負ノルムの非物理的状態に対応する $B(x)$ とに完全に分離するわけである. $m_0 \neq 0$ なる限り dipole ghost は存在しないから 3 次元運動量表示も可能である. すなわち $\omega_{\boldsymbol{p}}\equiv\sqrt{m_0{}^2+\boldsymbol{p}^2}$ と書くとき, U_μ, B の正エネルギー部分を

$$U_\mu{}^{(+)}(x)=(2\pi)^{-3/2}\int d^3p\,(2\omega_{\boldsymbol{p}})^{-1/2}\alpha_\mu(\boldsymbol{p})\exp(-ipx) \quad (p_0=\omega_{\boldsymbol{p}}) \tag{24}$$

$$B^{(+)}(x)=(2\pi)^{-3/2}m_0\int d^3p\,(2|\boldsymbol{p}|)^{-1/2}\beta(\boldsymbol{p})\exp(-i|\boldsymbol{p}|x_0+i\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}) \tag{25}$$

のように展開できる. ここで $\alpha_\mu(\boldsymbol{p})$, $\beta(\boldsymbol{p})$ は

$$p^\mu\alpha_\mu(\boldsymbol{p})=0 \tag{26}$$

$$[\alpha_\mu(\boldsymbol{p}),\ \alpha_\nu{}^\dagger(\boldsymbol{q})]=-(g_{\mu\nu}-m_0{}^{-2}p_\mu p_\nu)\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}) \tag{27}$$

$$[\alpha_\mu(\boldsymbol{p}),\ \beta^\dagger(\boldsymbol{q})]=0 \tag{28}$$

$$[\beta(\boldsymbol{p}),\ \beta^\dagger(\boldsymbol{q})]=-\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}) \tag{29}$$

を満足する. 真空 $|0\rangle$ は

$$\alpha_\mu(\boldsymbol{p})|0\rangle=0, \qquad \beta(\boldsymbol{p})|0\rangle=0 \tag{30}$$

すなわち

$$A_\mu{}^{(+)}(x)|0\rangle=0, \qquad B^{(+)}(x)|0\rangle=0 \tag{31}$$

で定義される.

(23)～(30) は $m_0 \neq 0$ のときのみ意味がある. これに対し, (13)～(22) や (31) は $m_0\to 0$ でも意味のある式である. 重要なことは, $m_0 \neq 0$ のときは $[B,B]\neq 0$ で, $m_0=0$ のとき $[B,B]=0$ になることである. このために, $m_0 \neq 0$ では $B(x)|0\rangle$ が非物理的状態になるが, その代り $U_\mu(x)$ が作れて $U_\mu(x)|0\rangle$ が 3 つの独立な正ノルムの物理的状態を与える. $m_0=0$ のときは, スカラー光子 $B(x)|0\rangle$ が物理的状態となり, タテ波光子が非物理的となる. しかもスカラー光子はゼロノルムであるために物理的状態であっても観測にかかることはない. このようにして観測される独立成分の数が $m_0 \neq 0$ のとき 3 つ, $m_0=0$ のとき 2 つということが, m_0 に

関する連続性を保ったままでみごとに表現されていることがわかる．

Proca 形式と異なり，A_μ の4つの成分を全部正準変数として扱っているから，同時刻で非可換になるというようなことはありえない．したがって，Proca 場のときのような不都合は起こらず，たとえば

$$\langle 0|\mathrm{T}[A_\mu(x)A_\nu(y)]|0\rangle = -(g_{\mu\nu}+m_0^{-2}\partial^x{}_\mu\partial^x{}_\nu)\Delta_F(x-y;\, m_0^2) + m_0^{-2}\partial^x{}_\mu\partial^x{}_\nu D_F(x-y) \tag{32}$$

が成立する．(32) は Lorentz 共変であるばかりでなく，Lorentz 条件とも矛盾しない．また (32) の運動量表示も，微分演算子からくる $p_\mu p_\nu$ の寄与が Δ_F からの分と D_F からの分とが相殺し，高エネルギーでの振る舞いはスカラー場のときと同じになる．

3-6 d　Heisenberg 表示での考察　相互作用を導入するとき，簡単のため電磁場の場合と同じように極小相互作用の形で導入するものと仮定する．そうすると場の方程式は，(14) の方は自由場のときのままで，(15) の方が

$$(\Box+m_0^2)A_\mu-\partial_\mu B=j_\mu \tag{33}$$

と変わるが，$\partial^\mu j_\mu=0$ のおかげで (16) はそのまま，したがって補助条件も (22) の形で書ける*．正準交換関係も不変だから，4次元交換関係 (20), (21) もそのまま成立し，これと (33) とから電磁場の場合と同じく

$$[B(x),\, j_\mu(y)]=0 \tag{34}$$

が得られる．

しかし，$m_0 \neq 0$ とすると，電磁場の場合と違って dipole ghost は存在しないと考えられる．したがって，A_μ の積の真空期待値のスペクトル表示を，普通のように完全系をはさんで計算できる．それゆえ，3-5 の(20) と同様の考察が A_μ 自身に対してできるが，質量0の場 $B(x)$ の1粒子状態からの寄与が存在することに注意しなければならない．たとえば交換子の真空期待値は

$$\langle 0|[A_\mu(x),\, A_\nu(y)]|0\rangle = -i\int_0^\infty d\kappa^2\, \rho(\kappa^2)(g_{\mu\nu}+\kappa^{-2}\partial^x{}_\mu\partial^x{}_\nu)\Delta(x-y;\,\kappa^2) + im_0^{-2}h\partial^x{}_\mu\partial^x{}_\nu D(x-y) \tag{35}$$

のように書けるはずである（第1項は $\kappa^2=0$ での離散スペクトルは含まないものとする）．未定のパラメーター h は次のようにして決められる．(35)

* もちろん何度も注意したように，これは方程式の形についていっているので，その内容まで同じだというのではない．

の両辺に $(\square^x+m_0^2)(\square^y+m_0^2)$ を作用させると，(33), (21), (34) により

$$\langle 0|[j_\mu(x),\ j_\nu(y)]|0\rangle+im_0^2\partial^x{}_\mu\partial^x{}_\nu D(x-y)$$
$$=-i\int_0^\infty d\kappa^2(\kappa^2-m_0^2)^2\rho(\kappa^2)(g_{\mu\nu}+\kappa^{-2}\partial^x{}_\mu\partial^x{}_\nu)\Delta(x-y\,;\,\kappa^2)$$
$$+im_0^2h\partial^x{}_\mu\partial^x{}_\nu D(x-y) \tag{36}$$

を得る．ところで (34) と (22) により $j_\nu(y)|0\rangle$ は物理的状態であるから，非物理的状態である $B(x)$ の 1 粒子状態は寄与し得ない．したがって，もしほかに質量 0 の 1 粒子状態が存在しないものと仮定すれば，(36) から

$$h=1 \tag{37}$$

$$(\kappa^2-m_0^2)^2\rho(\kappa^2)\geqq 0 \tag{38}$$

であることがわかる．$m_0\neq 0$ では物理的質量がちょうど m_0 に等しいような 1 粒子状態はないであろうから，(38) は $\rho(\kappa^2)\geqq 0$ と同等である．

(35) を y_0 で微分し，$y_0=x_0$ とおくと正準交換関係により，

$$i\delta_{kl}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})=-i\int_0^\infty d\kappa^2\,\rho(\kappa^2)(-\delta_{kl}+\kappa^{-2}\partial^x{}_k\partial^x{}_l)\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$$
$$+im_0^{-2}\partial^x{}_k\partial^x{}_l\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{39}$$

であるから，

$$\int_0^\infty d\kappa^2\,\rho(\kappa^2)=1 \tag{40}$$

$$\frac{1}{m_0^2}=\int_0^\infty d\kappa^2\frac{\rho(\kappa^2)}{\kappa^2} \tag{41}$$

という関係式が得られる．スカラー場の場合の式 2-8 の (17), (28) と比較してみると，はだかの質量の関係式の方が相加平均でなく調和平均になっている．

$A_\mu(x)$ の物理的質量を m とすると，

$$\rho(\kappa^2)=Z_3\delta(\kappa^2-m^2)+\theta(\kappa^2-\kappa_0^2)\sigma(\kappa^2) \tag{42}$$

のように書けるであろう．ただし $Z_3>0$, $\sigma(\kappa^2)\geqq 0$, $\kappa_0\geqq m$ である．これを (40), (41) に代入すると，

$$0<Z_3=1-\int_{\kappa_0^2}^\infty d\kappa^2\,\sigma(\kappa^2)<1 \tag{43}$$

$$\frac{1}{m_0^2}=\frac{Z_3}{m^2}+\int_{\kappa_0^2}^\infty d\kappa^2\frac{\sigma(\kappa^2)}{\kappa^2} \tag{44}$$

を得る．(44) を ♦Johnson（ジョンソン）の定理という*.

* Johnson の定理はもともと Proca 形式で導出されたもので（演習問題 3.8 参照），$m_0\to 0$ の極限をとることは正当でなかった．

(44) で $m_0\to 0$ の極限を考えよう．そうすると，もしこのとき $m\to 0$ でなかったとすると，(44) の右辺は有限であり，それに反して左辺は無限大になるので，矛盾を生ずる．したがって，$m_0\to 0$ ならば $m\to 0$ でなければならない．電磁場は，はだかの質量はゲージ不変性により 0 であるが，その物理的質量まで 0 になるのはこの理由による．なおこの証明には (42) を具体的に仮定する必要はなく，(41) から直接に導くこともできる．この結論は重要であるので，用いた仮定をもう一度まとめておくと，次の通りである．

1. j_μ は極小相互作用により導入される電流とする．

2. $m_0\neq 0$ のとき 補助条件 (22) を満足する質量 0 の 1 粒子状態は存在しないものとする．

電磁場を考えるときは，第 1 の仮定は当然である．問題は第 2 の仮定で，これを破ると電磁場に 0 でない物理的質量をもたせることが可能となる．次節においてそのような実例が存在することを示す．

さて，(37), (42), (44) を (35) に代入すると，

$$\begin{aligned}\langle 0|[A_\mu(x),\ A_\nu(y)]|0\rangle = &-iZ_3(g_{\mu\nu}+m^{-2}\partial^x{}_\mu\partial^x{}_\nu)\Delta(x-y\,;\,m^2)\\ &+iZ_3(m^{-2}+K)\partial^x{}_\mu\partial^x{}_\nu D(x-y)\\ &-i\int_{\kappa_0{}^2}^\infty d\kappa^2\,\sigma(\kappa^2)(g_{\mu\nu}+\kappa^{-2}\partial^x{}_\mu\partial^x{}_\nu)\Delta(x-y\,;\,\kappa^2)\end{aligned}\tag{45}$$

を得る．ただし

$$Z_3K\equiv\int_{\kappa_0{}^2}^\infty d\kappa^2\sigma(\kappa^2)/\kappa^2\tag{46}$$

とおいた．(45) の $m\to 0$ の極限として，3-5 の (33) の $\alpha=0$ の場合が再現されることは見やすい．

3-6 e gaugeon を含む形式 $m_0\neq 0$ の場合は古典論ではゲージ不変でない．しかし量子論へ移行すると，どのみち自由場では広い意味でのゲージ不変性はひとまずこわさなければならない．それゆえゲージ不変性に関しては，少なくとも明白に共変な形式では，$m_0=0$ のときと $m_0\neq 0$ のときとであまり本質的差異はないといえる．実際 3-3 l で述べた gaugeon を含む形式を一般の m_0 の場合に拡張することができるのである．この場合の自由場の Lagrangian 密度を 3-3 の (116) の拡張として，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0=&-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}+\frac{1}{2}m_0{}^2A^\mu A_\mu+B\partial^\mu A_\mu-\partial^\mu G\partial_\mu C\\ &-\frac{1}{2}\epsilon\Big[C+\gamma B+\frac{1}{2}\epsilon(1+\epsilon\gamma^2)m_0{}^2G\Big]^2\end{aligned}\tag{47}$$

ととれば，すべてうまくゆくことが知られている*.

3-6 f 荷電ベクトル場の問題 以上の話はすべて中性ベクトル場に関するものであった．これを複素あるいは荷電ベクトル場に拡張できるであろうか．自由場に関しては明らかに全く問題は起こらない．しかし相互作用が入ると，荷電ベクトル場に対する j_μ は，3-4 の (8) のようには構成できないので，もはや保存則 $\partial^\mu j_\mu=0$ を満たさない．そうすると，Bが自由場の方程式を満たさなくなり，補助条件の設定が矛盾なく行なえなくなる．補助条件をやめてしまうのも1つの考えだが，これは確率解釈に悩まされる．そこで何とか $\partial^\mu j_\mu=0$ になるようにできないものかと考えると，1つだけ方法がある．それは相変換に関して第1種ゲージ変換を第2種ゲージ変換に拡張して A_μ を導入したのと同じやり方を，アイソスピン群 $SU(2)$ の変換に関して用いるのである．この方法で isovector のベクトル場 $A_\mu{}^{(k)}$ ($k=1, 2, 3$) が導入されるが**，これを ♦Yang-Mills (ミルズ) 場という．しかし，$SU(2)$ が可換群でないため，電磁場に比して Yang-Mills 場は一段と複雑な事情が生ずる．Yang-Mills 理論を用いると，アイソスピンの保存のゆえに $\partial^\mu j_\mu{}^{(k)}=0$ が証明できるが，残念ながらこれから $B^{(k)}$ が自由場の方程式を満たすことが導かれない．なぜかというと，$B^{(k)}$ 自身が isovector であるために $B^{(k)}$ が $j_\mu{}^{(k)}$ に寄与してしまうからである．それゆえ，Yang-Mills 場について補助条件を矛盾なく設定することはまだ成功していない．

Yang-Mills 場は最近とくに脚光を浴びているが，これを論ずるのには Feynman の経路積分の知識が必要になるので省略する．

3-7 自発的対称性の破れ

素粒子物理学では，厳密には成りたたないが，そしてその破れの大きさも必ずしも小さくないが，それでも有用である対称性が数多く見つかっている．このような破れた対称性に関し，場の方程式や交換関係は対称性を破っていないが，状態ベクトルとくに真空が対称性を破っているのだと考

---

* 場 $\Phi=A_\mu, B, C, G$ はすべて2つの質量をもつ方程式 $(\Box+m_0{}^2)\Box\Phi=0$ を満足することが証明できる．したがって，この理論ではBの質量がゲージに依存するような不都合なことは起こらない．

** このような方法で導入されるベクトル場を一般に ♦ゲージ場と呼ぶ．

えて，現実に観測されている非対称性を説明するのが，自発的対称性の破れの考え方である．このような考え方が正しいとする積極的な実験的根拠は現在までのところ全くないが，通常の場の量子論の枠内で考えられる新しい可能性として理論的に非常に興味のあるものである．とくに最近ゲージ不変性の自発的破れの考え方に基づいて電磁および弱い相互作用のくりこみ可能な統一理論の作れる可能性が指摘され，注目を浴びている．本節では，対称性の自発的破れ，とくに量子電磁力学のゲージ不変性の自発的破れについて簡単に説明する．考える対称性は原理的にはどんなものであってもよいが，以下では説明の都合上第1種ゲージ変換に対する不変性の自発的破れについて述べる．本節で電荷とか電磁場とかいう言葉を使っても現実のそれを指しているのではなく，あくまで理論的な可能性を考察しているのであることを断っておく*．現実に応用するときは，もちろんある保存量とそれに関連したゲージ場というふうに解釈しなければならない．

3-7 a 対称性を破る真空 Lagrangian 密度 $\mathcal{L}$ が第1種ゲージ変換に対し不変であると，3-4 c で述べたように電荷演算子 Q は Hamiltonian H と可換である．それゆえ量子力学の教えるところに従えば，Q と H とは同時に対角化可能のはずである．とくに真空の一意性により，$|0\rangle$ は Q の固有状態になっているはずである．すなわち

$$Q|0\rangle=|0\rangle\langle 0|Q|0\rangle \tag{1}$$

と書けるであろう**．このことは量子力学のように有限自由度の系を扱う場合には全く正しい．数学の言葉でいえば，有限自由度の系では，交換関係の既約表現は，unitary 変換で移れるものを同値として一意的である．ところが無限大自由度の系ではもはやこのことが成立しない．同じ交換関係を満たす演算子の既約表現で unitary 同値でないものが無限にたくさん存在する．2-1 で生成消滅演算子を表現するのに Fock 空間を用いたが，Fock 空間に話を限らなければいろいろな表現が得られるのである．このような事情のため $[Q, H]=0$ であるにもかかわらず，場の量子論では $|0\rangle$ が Q の固有状態にならないということが実際に可能である***．す

* それゆえ本節では e は電子の電荷ではなくある正の量とする．

** 通常 $\langle 0|Q|0\rangle=0$ となるように Q を定義するが，このことは今重要でない．

*** これと同様なことは，物性論では強磁性，超電導，超流動などで現実に起こっていることがよく知られている．ただしこれらの場合は，真空に相当する基底状態はたくさんの粒子の存在する状態であるから，場の量子論の場合と形式的には類似していても，そこに本質的な差違があることを忘れてはならない．

なわち，(1) と異なり

$$Q|0\rangle \neq |0\rangle\langle 0|Q|0\rangle \qquad (2)$$

となることが理論的に許される．このような真空をもつ場合，Q の表わす対称性は ♦自発的な破れ (spontaneous breakdown) のある対称性であるという．

$\phi(x)$ を電荷 e をもつ荷電スカラー場とすると，3-4 の (13) から

$$[Q, \phi(x)] = e\phi(x) \qquad (3)$$

である．もし (1) が成りたっていれば左辺の真空期待値は 0 になるから，$\langle 0|\phi(x)|0\rangle = 0$ となるはずである．それゆえもしも

$$\langle 0|\phi(x)|0\rangle \neq 0 \qquad (4)$$

であるような荷電場 $\phi(x)$ が存在することがわかれば，第 1 種ゲージ不変性は自発的に破れていることになる．2-8 の (2) で考えた中性スカラー場の場合と違って，ゲージ変換に対する変換性があるため，荷電場の場合は $\langle 0|\phi(x)|0\rangle$ の値を勝手に変えるわけにはいかない．

対称性の自発的破れの理論は，破れのない理論と比べて真空期待値は全く変わるが，はじめに述べたように演算子の満たす Heisenberg 方程式や交換関係は一切変更をうけない．このことははっきりと記憶しておくことが必要である．

3-7 b　Goldstone の定理　自発的に破れた対称性が，空間反転や荷電共役のような離散的なものではなくて，ゲージ変換のように連続的な変換に対するものであるときは，一般に質量 0 のボゾンが存在しなければならないことが非常にゆるい仮定のもとにいえる．このボゾンを ♦Nambu (南部)-Goldstone (ゴールドストン) ボゾン，あるいはたんに ♦Goldstone ボゾンと呼ぶ．また，考えている対称性が Poincaré 群の変換と無関係な場合，すなわち内部対称性であるときは，Goldstone ボゾンのスピンは 0 でなければならない．Goldstone ボゾンの存在を主張する定理を，いくらか漠然と ♦Goldstone の定理という．これは具体的にはいろいろの形で述べられるが，ここでは仮定として

1.　電荷の保存則
2.　4 次元的 Heisenberg 方程式
3.　自発的対称性の破れ

の 3 つをとることにする．なお不定計量の Hilbert 空間の場合にはさらに平行移動の generator P_μ の固有状態が完全系をはることを仮定する．

電流を $j_\mu(x)$ とするとき

$$Q=\int d^3x\, j_0(x) \tag{5}$$

であるから，第1の仮定の電荷の保存は

$$\int d^3x[j_0(x),\ P_0]=0 \tag{6}$$

と書ける．第2の仮定の4次元的 Heisenberg 方程式としては次のものだけを必要とする．

$$i\partial_\mu j_0(x)=[j_0(x),\ P_\mu] \tag{7}$$

$$i\partial_\mu \phi(x)=[\phi(x),\ P_\mu] \tag{8}$$

第3の仮定の自発的対称性の破れは，(2) と (5) から

$$\int d^3x\langle\mathbf{0}|[j_0(x),\ \phi(y)]|\mathbf{0}\rangle=c\neq 0 \tag{9}$$

と書くことができる．ここで c は常数である．なぜなら，平行移動に対する不変性から左辺の真空期待値は $x_\mu-y_\mu$ だけの関数だが，3次元積分するから x_0-y_0 だけに依存しうる．しかし，これを x_0 について微分すると (7) と (6) により 0 になることがわかるからである．

さて，定理の証明は次の通りである．$\langle\mathbf{0}|[j_0(x),\ \phi(y)]|\mathbf{0}\rangle$ の間に P_μ の固有状態の完全系をはさむと，

$$\langle\mathbf{0}|[j_0(x),\ \phi(y)]|\mathbf{0}\rangle=\int d^4p\rho(p)e^{-ip(x-y)} \tag{10}$$

のように書けるはずである．両辺を3次元的に空間積分して (9) を用いると，

$$\begin{aligned} c&=\int d^4p\,\rho(p)(2\pi)^3\delta(\boldsymbol{p})\exp[-ip_0(x_0-y_0)] \\ &=(2\pi)^3\int d^4p\,\exp[-ip(x-y)]\rho(p)\delta(\boldsymbol{p}) \end{aligned} \tag{11}$$

を得る．両辺の Fourier 逆変換をとれば，

$$c\delta^4(p)=(2\pi)^3\rho(p)\delta(\boldsymbol{p}) \tag{12}$$

となる．$c\neq 0$ であるから，$\rho(p)$ は $\boldsymbol{p}=0$ のとき $\delta(p_0)$ に比例しなければならない．すなわち，真空のように $\boldsymbol{P}$ に関して離散スペクトルになるのではなくて，しかも $p_\mu=0$ になるような P_μ の固有状態が存在しなければならない．それは質量 0 の粒子の状態 $|\chi\rangle$ が存在するときのみ可能である．実際 Lorentz 共変性とエネルギーの正値性を使うならば，$\rho(p)$ は $\delta(p_0-|\boldsymbol{p}|)$ に比例すべきである．また $|\chi\rangle$ は $\langle\mathbf{0}|Q|\chi\rangle\neq 0$ となるような

状態であるから，Q の Lorentz 不変性により $|\chi\rangle$ のスピンは0でなければならないことがわかる．(証明終)

Goldstone ボゾンの存在は，対称性を破った真空を導入したために支払わなければならぬ代償ということができる．自然界に質量0，スピン0の粒子の存在は見いだされていないから，Goldstone ボゾンの出現は自発的対称性の破れの理論の一番の難点である．この困難はゲージ理論においてはじめて解決される．

3-7 c　Goldstone の定理の別証　上の Goldstone の定理の証明は一般の不定計量の場合には使えない．そこで計量の問題に無関係な別証を与えておこう．この証明は漸近場の完全性を用いる．

いくつかの漸近場 $\varphi_j^{\mathrm{in}}(x)$ $(j=1,2,\cdots)$ があるとする．$\varphi_j^{\mathrm{in}}(x)$ の第1種ゲージ変換に対する変換性は $[Q,\varphi_j^{\mathrm{in}}(x)]$ で決まる．漸近場は自由場の方程式を満たすから，変換後も自由場の方程式を満たすためには $[Q,\varphi_j^{\mathrm{in}}(x)]$ も同じ自由場の方程式を満たさなければならない．漸近場に関して非線形な量は自由場の方程式を満たしえないので，

$$[Q,\ \varphi_j^{\mathrm{in}}(x)]=\sum_k a_{jk}\varphi_k^{\mathrm{in}}(x)+b_j \tag{13}$$

のように書けなければならない．ここに a_{jk} は常数または常数係数の微分演算子，b_j は常数で，和は φ_k^{in} が φ_j^{in} と同じ質量，同じ統計性をもつような k $(k=j$ を含む) についてとれば十分である．

さて漸近場は生成演算子と消滅演算子の一次結合として書けるから，もちろんすべての k に対し

$$\langle 0|\varphi_k^{\mathrm{in}}(x)|0\rangle=0 \tag{14}$$

である．そこで(13)の真空期待値をとると，

$$\langle 0|[Q,\ \varphi_j^{\mathrm{in}}(x)]|0\rangle=b_j \tag{15}$$

となるから，漸近場の完全性により，自発的対称性の破れがあるためには，$b_j\neq 0$ なるものが少なくとも1つ存在しなければならない．$b_j\neq 0$ に対応する $\varphi_j^{\mathrm{in}}(x)$ を $\chi^{\mathrm{in}}(x)$ と書くと，$\chi^{\mathrm{in}}(x)$ は(15)によりスピン0でかつ中性でなければならない．したがって，$\chi^{\mathrm{in}}(x)$ は

$$(\Box+\mu^2)^n\chi^{\mathrm{in}}(x)=0 \qquad (n\geqq 1) \tag{16}$$

を満たす*．したがって，

---

* $n\geqq 2$ すなわち Goldstone ボゾンが multipole ghost になることも理論的に可能である．

$$(\Box+\mu^2)^n\langle 0|[Q, \chi^{\rm in}(x)]|0\rangle=0. \tag{17}$$

仮定により左辺の真空期待値は0でない常数だから，(17)が成立するためには，

$$\mu=0 \tag{18}$$

でなければならない．つまり Goldstone ボソンが存在する．(証明終)

漸近場は本質的に自由場の交換関係を満たすから，交換関係を1回とると $\varphi_j^{\rm in}$ に関する次数は必ず2つ下がる．したがって(13)から Q は $\varphi_k^{\rm in}$ $(k=1, 2, \cdots)$ の2次の多項式の積分として書けることがわかる．しかも自発的対称性の破れがあるための必要かつ十分な条件は，$b_j\neq0$ の存在であったから，それはまた Q が $\varphi_k^{\rm in}$ について1次の項を含むことであるともいえる．Qの1次の項は，$\chi^{\rm in}$ の満たす交換関係を知れば(15)により直ちに決定される．

3-7 d Goldstone 模型 自発的対称性の破れの理論の例として最も簡単でわかりやすいのは *Goldstone 模型であろう．この模型の Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L}_G\equiv\partial^\mu\phi^\dagger\cdot\partial_\mu\phi-u\phi^\dagger\phi-(\lambda/4)(\phi^\dagger\phi)^2 \tag{19}$$

である．はだかの質量の2乗はあとの都合上 u と書いた．またエネルギーの正値性の要請から $\lambda>0$ を仮定する．(19)はもちろん相変換 $\phi'=e^{i\theta}\phi$ に対し不変である．(19)から導かれる場の方程式は

$$(\Box+u)\phi+\frac{1}{2}\lambda(\phi^\dagger\phi)\phi=0 \tag{20}$$

である．

自発的対称性の破れの定性的なイメージを得るために，はじめに ϕ を演算子としないで古典的な場と考える．場の方程式(20)の一番簡単な解は，常数の解

$$\phi(x)=v/\sqrt{2} \tag{21}$$

である．ただし，複素数 v は方程式

$$\left(u+\frac{1}{4}\lambda|v|^2\right)v=0 \tag{22}$$

を満足するとする．$\lambda>0$ であるから，もし $u>0$ ならば(22)の解は $v=0$ のみである．これは相変換に対し不変な最低エネルギー・モードである．これに対しもしも $u<0$ であるとすると*，$v=0$ 以外に(22)は

* これははだかの質量が虚数になることを意味するが，物理的質量ではないからタキオンではなく，理論的困難はひき起こさない．

$$|v|=\sqrt{-4u/\lambda} \tag{23}$$

という，v の複素平面の円周上にある無限に多くの解をもつ．しかもこの解のエネルギー密度は

$$\mathcal{E}_0 \equiv u|v/\sqrt{2}|^2+(\lambda/4)|v/\sqrt{2}|^4=-u^2/\lambda<0 \tag{24}$$

であるから，$v=0$ の解のエネルギー密度 0 よりも低い．すなわち，(23) が最低エネルギー・モードを与える．これらは全体として相変換に対し不変になっているが，その 1 つだけをとり出せばこれはもはや相変換不変ではない．最低エネルギー・モードは場の量子論では真空に対応する．場の量子論で真空が非可算的無限個存在すると Hilbert 空間が可分でなくなるので困る．そこで (23) の解のうちただ 1 つだけをとり出すことにする．通常

$$v=\sqrt{-4u/\lambda}>0 \tag{25}$$

をとる．

(20)の一般の解は最低エネルギー・モードの付近の振動として理解すべきであるから，

$$\sqrt{2}\,\phi(x)\equiv v+\varphi(x)+i\chi(x) \tag{26}$$

とおく．ただし，φ, χ は実数値の場である．(26) を (19) に代入して計算すると，$\mathcal{L}_G=\hat{\mathcal{L}}_G-\mathcal{E}_0$ と書くとき

$$\hat{\mathcal{L}}_G\equiv\frac{1}{2}(\partial^\mu\varphi\cdot\partial_\mu\varphi-\mu_0{}^2\varphi^2)+\frac{1}{2}\partial^\mu\chi\cdot\partial_\mu\chi-\frac{1}{2}g\mu_0\varphi(\varphi^2+\chi^2)-\frac{1}{8}g^2(\varphi^2+\chi^2)^2 \tag{27}$$

となる．ただし

$$\mu_0{}^2\equiv-2u>0 \tag{28}$$

$$g\equiv\sqrt{\lambda/2}>0 \tag{29}$$

とおいた．それゆえ

$$v=\mu_0/g \tag{30}$$

である．(27) の形にしてみると，もはや相変換に対する不変性は失われたように見える．

さて場の量子論に戻ろう．場の量子論では，古典論の結果は v が十分大きいとき第 0 近似として成立すると考えられる．(26) の $\varphi(x)$, $\chi(x)$ は

$$\langle 0|\varphi(x)|0\rangle=\langle 0|\chi(x)|0\rangle=0 \tag{31}$$

であるような中性スカラー場とみなされる．そうすると (26) から

$$\langle 0|\phi(x)|0\rangle=v/\sqrt{2}\neq 0 \tag{32}$$

であり，(4) の条件にかなっているから，たしかに自発的に第1種ゲージ不変性が破れているといえる．

v が非常に大きくて，μ_0 が普通の大きさの量であると，(30) から g は非常に小さな量となる．そのとき，(27) は第3項，第4項が無視できて，2つの自由な中性スカラー場 φ と χ とから成ることになる．φ の方は正の質量 μ_0 をもつが，χ の方は質量が0である．χ が Goldstone ボゾンにほかならない．

相互作用の影響を考慮すると，φ の質量は補正をうける．しかし χ の質量は0のままであることは Goldstone の定理が保証する．したがって，2-8 の (43) から，Z_χ を χ のはだかの確率として，

$$[\chi^{\rm in}(x),\ \chi^{\rm in}(y)]=iZ_\chi D(x-y) \tag{33}$$

である．これを使うと，電荷演算子 Q は次のように決まる．

$$Q=Z_\chi^{-1}ev\int d^3x\,\partial_0\chi^{\rm in}(x)+{\rm const} \tag{34}$$

なぜなら，まず漸近場は全部中性であるから Q は2次の項を含まない．したがって，Q は $\chi^{\rm in}(x)$ の1次式の積分である．しかも Q の被積分関数はベクトルの第0成分でなければならないから，$\partial_0\chi^{\rm in}(x)$ に比例する．比例係数は，(3), (32) から従う式

$$\langle 0|[Q,\ \phi(x)]|0\rangle=ev/\sqrt{2} \tag{35}$$

で $x_0\to-\infty$ を考えると，(26), (33) により $Z_\chi^{-1}ev$ であることがわかる．(証明終)

3-7 e　Higgs 模型　すでに注意したように，自発的対称性の破れの理論では Goldstone ボゾンの出現に悩まされる．何とか Goldstone の定理の呪縛から逃れる方法はないだろうか．現在の場の量子論の範囲内でうまく逃れる方法が1つだけある．それは Q が定義できないような場合を考えることである．

Goldstone 模型に極小相互作用で電磁場を導入した理論を，♦Higgs (ヒッグス) 模型という．その Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L}_H\equiv-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}+(\partial^\mu+ieA^\mu)\phi^\dagger\cdot(\partial_\mu-ieA_\mu)\phi-u\phi^\dagger\phi$$
$$-(\lambda/4)(\phi^\dagger\phi)^2 \tag{36}$$

である．ただし量子化を Coulomb ゲージで行なうところがミソである．3-4 の (23) と 3-1 の (14) からわかるように，$j_0(x)$ は Coulomb 力の

項を含む．つまり Coulomb ゲージでは非局所的な演算子である．ところが (3) のような交換関係を考えているとき，じつは暗に $j_0(x)$ の局所可換性を仮定しているのである．というのは，$\int d^3x j_0(x)$ は空間遠方からの寄与が収束しないので，(3) の左辺は正しくは (9) で考えたように

$$\int d^3y[j_0(x_0, \boldsymbol{y}),\ \phi(x_0, \boldsymbol{x})] \tag{37}$$

であると理解すべきなのであるが，(37) ならば局所可換性があれば $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}$ のところ以外は 0 になるから遠方からの寄与による困難は起こらない．ところが Higgs 模型では局所可換性がないので，(37) のように考えても (3) の左辺は意味をもたせえないのである．それゆえ Goldstone の定理が適用されないことになる．

さて，(36) において (26) のようにおくと，A_μ と ϕ との両方を含む項は

$$\begin{aligned}&ieA^\mu(\phi^\dagger\partial_\mu\phi-\partial_\mu\phi^\dagger\cdot\phi)+e^2A^\mu A_\mu\phi^\dagger\phi\\&\qquad=eA^\mu[\chi\partial_\mu\varphi-(v+\varphi)\partial_\mu\chi]+\frac{1}{2}e^2A^\mu A_\mu[(v+\varphi)^2+\chi^2]\end{aligned} \tag{38}$$

であるから，(27) と合わせると，$\mathcal{L}_H=\hat{\mathcal{L}}_H-\mathcal{E}_0$ と書くとき，

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{L}}_H\equiv&-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}+\frac{1}{2}M^2(A^\mu-M^{-1}\partial^\mu\chi)(A_\mu-M^{-1}\partial_\mu\chi)\\&+\frac{1}{2}(\partial^\mu\varphi\cdot\partial_\mu\varphi-\mu_0{}^2\varphi^2)+eA^\mu(\chi\partial_\mu\varphi-\varphi\partial_\mu\chi)+eMA^\mu A_\mu\varphi\\&+\frac{1}{2}e^2A^\mu A_\mu(\varphi^2+\chi^2)-\frac{1}{2}g\mu_0\varphi(\varphi^2+\chi^2)-\frac{1}{8}g^2(\varphi^2+\chi^2)^2\end{aligned} \tag{39}$$

となる．ただし

$$M\equiv ev>0 \tag{40}$$

とおいた．v が非常に大きくて，M, μ_0 が普通の大きさの量とすると，e, g $(=e\mu_0/M)$ は 1 に比べて十分小さいから，第 0 近似では (39) のはじめの 3 つの項だけを考えればよいであろう．ここで

$$U_\mu\equiv A_\mu-M^{-1}\partial_\mu\chi \tag{41}$$

とおけば，質量 M の Proca 場 U_μ と質量 μ_0 の中性スカラー場 φ とだけが残る．すなわち Goldstone ボゾン χ は消失した．この自由度は (41) に見られるように U_μ のタテ波成分に移行したと考えられる．このようにゲージ場を含む自発的対称性の破れの理論において，Goldstone ボゾンが消失し同時にゲージ場が質量をもつようになる現象を *Higgs 現象 (Higgs phenomenon または Higgs mechanism) という．

3-7 f Higgs 模型の共変的とり扱い 上の Higgs 現象の議論は半古典的であること*, Coulomb ゲージという共変性のない形式に頼っていることが不満足である. そこで今度は, これを共変的な場の量子論で考え直してみることにしよう. この場合は, 局所可換性があるのでまた Goldstone の定理から逃れられないはずであるが, それでは Higgs 現象はどうなるのであろうか. この問題の解決には Landau ゲージの量子電磁力学が最も有効である. なぜなら, A_μ は質量を獲得するはずだから, 中性ベクトル場理論と連続的につながる形式でないと困ることが予想されるからである. したがって, 出発点の Lagrangian 密度は $\mathcal{L}_H+B\partial^\mu A_\mu$ である.

4 次元交換関係 3-5 の (7), (8) はもちろん真空の定義に無関係だからそのまま成立する. しかし $[A_\mu(x),\ A_\nu(y)]$ の真空期待値の方はもはや 3-5 の (33) ではなく, (39) からわかるように 0 でない質量を獲得するから, 中性スカラー場の式 3-6 の (45) のような式になる. すなわち, m をその物理的質量とすれば,

$$\begin{aligned}\langle 0|[A_\mu(x),\ A_\nu(y)]|0\rangle\\ &=-iZ_3(g_{\mu\nu}+m^{-2}\partial^x{}_\mu\partial^x{}_\nu)\Delta(x-y\,;\,m^2)+iL\partial^x{}_\mu\partial^x{}_\nu D(x-y)\\ &\quad -i\int_0^\infty d\kappa^2\,\sigma(\kappa^2)(g_{\mu\nu}+\kappa^{-2}\partial^x{}_\mu\partial^x{}_\nu)\Delta(x-y\,;\,\kappa^2)\end{aligned}\tag{42}$$

となる. ただし

$$L\equiv\frac{Z_3}{m^2}+\int_0^\infty d\kappa^2\frac{\sigma(\kappa^2)}{\kappa^2}>0\tag{43}$$

は M^{-2} とは一致しない. なぜなら, M は本当のはだかの質量ではないからである.

次に, 3-5 の (11), (12) に (26) を代入すると

$$[B(x),\ \varphi(y)]=ie\chi(y)D(x-y)\tag{44}$$

$$[B(x),\ \chi(y)]=-ie[v+\varphi(y)]D(x-y)\tag{45}$$

となるから, (31) により

$$\langle 0|[B(x),\ \varphi(y)]|0\rangle=0\tag{46}$$

$$\langle 0|[B(x),\ \chi(y)]|0\rangle=-iMD(x-y)\tag{47}$$

である. また

$$\langle 0|[A_\mu(x),\ \varphi(y)]|0\rangle=0\tag{48}$$

$$\langle 0|[A_\mu(x),\ \chi(y)]|0\rangle=0\tag{49}$$

---

* とくに相互作用項の χ の存在をどう考えるのかが不明瞭である.

である．なぜなら，Lorentz 共変性，局所可換性および $\partial^\mu A_\mu=0$ により左辺は $\partial_\mu D(x-y)$ に比例しなければならないが，その比例係数は正準交換関係によって0であることがわかるからである*.

3-7 g 漸近場の交換関係 交換関係の真空期待値がわかると1粒子状態が決まるから，上の結果から漸近場の交換関係が決定される．$x_0\to-\infty$ の漸近場を $A^{\rm in}{}_\mu(x)$, $B^{\rm in}(x)$, $\varphi^{\rm in}(x)$, $\chi^{\rm in}(x)$ とすると，3-5 の (7), (8) と本節の (42), (46)～(49) により，

$$[B^{\rm in}(x),\ B^{\rm in}(y)]=0 \tag{50}$$

$$[A^{\rm in}{}_\mu(x),\ B^{\rm in}(y)]=-i\partial^x{}_\mu D(x-y) \tag{51}$$

$$\begin{aligned}[A^{\rm in}{}_\mu(x),\ A^{\rm in}{}_\nu(y)]=&-iZ_3(g_{\mu\nu}+m^{-2}\partial^x{}_\mu\partial^x{}_\nu)\varDelta(x-y\,;\,m^2)\\&+iL\partial^x{}_\mu\partial^x{}_\nu D(x-y)\end{aligned} \tag{52}$$

$$[B^{\rm in}(x),\ \varphi^{\rm in}(y)]=0 \tag{53}$$

$$[B^{\rm in}(x),\ \chi^{\rm in}(y)]=-iMD(x-y) \tag{54}$$

$$[A^{\rm in}{}_\mu(x),\ \varphi^{\rm in}(y)]=0 \tag{55}$$

$$[A^{\rm in}{}_\mu(x),\ \chi^{\rm in}(y)]=0 \tag{56}$$

となる．

重要な式は (54) である．この式から，$\chi^{\rm in}$ は質量0でなければならないことがわかる．なぜなら，$\chi^{\rm in}$ が (16) の $\mu\neq0$ の式を満足するとすると矛盾を生ずるからである．したがって，$\chi^{\rm in}$ はやはり Goldstone ボゾンである．また $\square\chi^{\rm in}$ は他の漸近場で書けないので，それは 0 でなければならない**．ゆえに

$$[\chi^{\rm in}(x),\ \chi^{\rm in}(y)]=iZ_\chi D(x-y) \tag{57}$$

$$[\chi^{\rm in}(x),\ \varphi^{\rm in}(y)]=0 \tag{58}$$

$$[\varphi^{\rm in}(x),\ \varphi^{\rm in}(y)]=iZ_\varphi\varDelta(x-y\,;\,m_\varphi{}^2) \tag{59}$$

となるはずである．

さて，(52) に見られるように，$A^{\rm in}{}_\mu$ は質量 m のベクトル部分と質量0のスカラー部分とが混ざったものであるので，後者を分離したものを定義しておくのが便利である．それにはまず

$$U^{\rm in}{}_\mu=A^{\rm in}{}_\mu-a\partial_\mu B^{\rm in}-b\partial_\mu\chi^{\rm in} \tag{60}$$

---

* 理論は A_μ, B, χ の符号を同時に変える変換に対し不変である．このことからも (46), (48) が導かれる．

** 上の議論を Landau ゲージ以外の場合に拡張すると，$\chi^{\rm in}(x)$ は dipole ghost になり $\square\chi^{\rm in}=-\alpha MB^{\rm in}$ という方程式を満たすことが示される．

とおき,

$$[U^{\rm in}{}_\mu(x),\ B^{\rm in}(y)]=[U^{\rm in}{}_\mu(x),\ \chi^{\rm in}(y)]=0 \qquad (61)$$

となるように a, b を決める．すなわち

$$0=[U^{\rm in}{}_\mu+a\partial_\mu B^{\rm in},\ B^{\rm in}]=[A^{\rm in}{}_\mu-b\partial_\mu\chi^{\rm in},\ B^{\rm in}]$$
$$=-i\partial^x{}_\mu D+ibM\partial^x{}_\mu D \qquad (62)$$

$$0=[A^{\rm in}{}_\mu-a\partial_\mu B^{\rm in}-b\partial_\mu\chi^{\rm in},\ \chi^{\rm in}]=iaM\partial^x{}_\mu D-ibZ_\chi\partial^x{}_\mu D \qquad (63)$$

から

$$U^{\rm in}{}_\mu\equiv A^{\rm in}{}_\mu-M^{-2}Z_\chi\partial_\mu B^{\rm in}-M^{-1}\partial_\mu\chi^{\rm in} \qquad (64)$$

を得る．このようにしてとり出された $U^{\rm in}{}_\mu$ は質量 0 の成分を含まないはずだから，Proca 方程式

$$(\Box+m^2)U^{\rm in}{}_\mu=0, \qquad \partial^\mu U^{\rm in}{}_\mu=0 \qquad (65)$$

を満足する．(52) に (64) を代入し，(61) および (50), (54), (57) を用いて計算すると

$$[U^{\rm in}{}_\mu(x),\ U^{\rm in}{}_\nu(y)]=-iZ_3(g_{\mu\nu}+m^{-2}\partial^x{}_\mu\partial^x{}_\nu)\Delta(x-y\,;\,m^2) \qquad (66)$$

で，かつ

$$L=M^{-2}Z_\chi \qquad (67)$$

でなければならないことがわかる．

3-7 h　Higgs 現象の共変的理論での説明　さて，物理的状態を決める補助条件は

$$B^{(+)}(x)|{\rm phys}\rangle=0 \qquad (B^{{\rm in}(+)}(x)=B^{(+)}(x)=B^{{\rm out}(+)}(x)) \qquad (68)$$

であるから，(61), (50), (53) からわかるように，$U^{\rm in}{}_\mu$, $B^{\rm in}$, $\varphi^{\rm in}$ は物理的粒子に対応する演算子である．しかし，(54) からわかるように，Goldstone ボゾン $\chi^{\rm in}$ は非物理的粒子である．$\chi(x)$ という場は実際に他の場と相互作用し，かつ $\chi^{\rm in}$ の作る状態のノルムも (67) と (43) から知られるように正であるが，非物理的なのである．したがって，3-5 d のときと同じ推論により Goldstone ボゾンを全く含まない物理的 S 行列が unitary である．これが Higgs 現象の共変的理論における説明である．このようにして，Goldstone の定理と Higgs 現象は，不定計量の理論においては両立しうるものであることが明らかになった．

3-6 d で述べた Johnson の定理と，Higgs 現象で A_μ が質量を獲得することとは一見矛盾しているようだが，これも Goldstone ボゾンの存在によって説明される．Johnson の定理を考えるときは，A_μ に最初からはだかの質量 m_0 をもたせなければならないから，3-6 の (21) のよう

に $[B^{\text{in}}(x),\ B^{\text{in}}(y)]$ が 0 にならない．そうすると

$$\hat{\chi}^{\text{in}}(x)\equiv m_0{}^2\chi^{\text{in}}(x)-MB^{\text{in}}(x) \tag{69}$$

は，d'Alembert 方程式を満足し，かつ

$$[\hat{\chi}^{\text{in}}(x),\ B^{\text{in}}(y)]=0 \tag{70}$$

であるから，$\hat{\chi}^{\text{in}}(x)|0\rangle$ は補助条件を満足する質量 0 の 1 粒子状態である．したがって，$m_0\to 0$ のとき $m\to 0$ という証明ができなくなるわけである．

なお，Higgs 模型では電荷演算子は

$$Q=-\int d^3x\,\partial_0 B^{\text{in}}(x)+\text{const} \tag{71}$$

で与えられる(演習問題 3.9 参照)．これを (34) の Goldstone 模型のときの Q と比較してみることは興味がある．Q はゲージ不変量でなくてはならないが，$\partial_0\chi^{\text{in}}$ は第 1 種ゲージ変換 (17) に対しては不変であるが，第 2 種ゲージ変換に対してはもはや不変ではないので，(71) ではそれが第 2 種ゲージ変換に対しても不変な $\partial_0 B^{\text{in}}$ にその席を譲ったわけである．

演 習 問 題　3.

3.1　3-3 の (44) を導け．

3.2　3-3 の (47) の積分が対数発散することを示せ．

3.3　$a_\mu(p)$, $b(p)$ の定義 (3-3 の (66), (67)) を用いて，3-3 の (72)～(74) を確かめよ．

3.4　3-3 の (115) を証明せよ．

3.5　次のようにすれば 3-3 の (112) を満たすスカラー $\hat{\Lambda}(x)$ が作れるようにみえる．この議論のどこが間違っているか．

$$B^{(+)}(x)=(2\pi)^{-3/2}\int d^4p\,\theta(p_0)\delta(p^2)\beta(p)e^{-ipx}$$

のように展開し，

$$\hat{\Lambda}(x)\equiv\hat{\Lambda}^{(+)}(x)+[\hat{\Lambda}^{(+)}(x)]^\dagger$$

$$\hat{\Lambda}^{(+)}(x)\equiv(2\pi)^{-3/2}\int d^4p\,\theta(p_0)\delta'(p^2)\beta(p)e^{-ipx}$$

とおけば，$\Box\hat{\Lambda}(x)=B(x)$ である．また $B^{(+)}(x)$ がスカラーだから $\beta(p)$ もスカラーのはずで，したがって $\hat{\Lambda}(x)$ もスカラーのはずである．なお，$p_\mu=0$ のところからの発散があったとしても必要な量は $\partial_\mu\hat{\Lambda}$ だから困らない．

3.6　演習問題 2.9 の結果と，荷電共役に対する不変性を用いて次のことを示せ．

$$\mathrm{T}[\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)]\equiv\theta(x_0-y_0)\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)-\theta(y_0-x_0)\bar{\psi}_\beta(y)\psi_\alpha(x)$$

とするとき，

$$S_F'(x-y)\equiv\langle 0|\mathrm{T}[\psi(x)\bar{\psi}(y)]|0\rangle$$

の Fourier 変換に i を乗じたものは

$$S_F'(p)=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^\infty d\kappa^2\frac{\rho_1(\kappa^2)\gamma p+\rho_2(\kappa^2)}{\kappa^2-p^2-i\varepsilon}$$

と表示される.

3.7 3-6 の (9) を証明せよ.

3.8 Johnson の定理 3-6 の (44) を Proca 形式で導け.

3.9 Higgs 模型の電荷演算子が 3-7 の (71) で与えられることを，交換関係を用いて確かめよ.

[追記]

本書第3章で補助場Bを用いるゲージ場の量子論を展開したが，最近この理論が画期的な進展をとげたことを特筆しておきたい. 京都大学の九後汰一郎，小嶋泉両氏により，Yang-Mills 場の共変的場の量子論がみごとな形で定式化された. さらに著者らは，これを拡張して Einstein の一般相対論の共変的場の量子論を構成することに成功した. これらの成果は，“自然を記述する最も基本的な理論は，ゲージ場の量子論であろう”という推測を，理論的側面から支持するものであるといえる. (1978年8月)

4. 摂動論

4-1 Dyson の S 行列

Heisenberg 表示は場の量子論の理論的考察には極めて有用であるが，場の演算子が複雑すぎて S 行列の具体的な計算にはあまり適していない．他方，Schrödinger 表示では場の演算子は時間を含まないので極めて簡単であるが，時間を特別扱いするため相対論的共変な理論には使えない．そこで共変的なとり扱いが可能でかつ場の演算子が簡単であるような中間的な表示が考えられた．それを *相互作用表示 (interaction picture) という．相互作用表示では場の演算子は自由場の 4 次元交換関係を満たし，相互作用に関する部分だけ状態ベクトルが変化する．

本節では相互作用表示に基づいて Dyson の S 行列を導く．

4-1 a　超多時間形式　Heisenberg 表示と異なり，相互作用表示では状態ベクトルは時間 t とともに動くわけであるが，状態ベクトルをたんに t の関数とすることは相対論的共変性の要請に反する．この困難は，場の量子論までいかなくとも，すでに相対論的多体問題で現われてくることである．たとえば，n 個の粒子はそれぞれの空間座標 $\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}, \cdots, \boldsymbol{x}^{(n)}$ をもっているだろうから，共通の時間 t を考えたのでは共変的に書くことができない．共変性の要請を満足するためには，それぞれに対応する時間 $x_0^{(1)}$, $x_0^{(2)}, \cdots, x_0^{(n)}$ を導入することが必要になる．ところで幸いもしすべての相異なる j, k に対し

$$(x^{(j)}-x^{(k)})^2<0 \qquad (1)$$

であるならば，Einstein 因果律のおかげで，このようにいくつもの時間をもつ状態という概念を矛盾なく定義することが可能である．このような

多体系のとり扱いを ♦多時間形式 (many-time formalism) という.

多時間形式の考え方を場の量子論に拡張したのが ♦超多時間形式(super-many-time formalism) である. 今度は有限個の時間の代りに ♦空間的超曲面(spacelike hypersurface) σ という概念を導入する. これは

$$x_0=f_\sigma(\boldsymbol{x}) \tag{2}$$

のように表わされる点の全体である. ただし, f_σ は連続関数でかつ (2) の上の任意の 2 点は (1) のように互いに空間的位置にあるようなものである. Lorentz 変換をすれば一般に f_σ の関数形は変わるであろうが, やはり空間的超曲面であることには変わりはない. その意味で σ を用いることは相対論的共変性の要請に合致している. f_σ がとくに常数である場合は $x_0=\text{const}$ という超平面であるから, 通常の意味の時間と同一視できる.

超多時間形式では, 状態ベクトルは $|\sigma\rangle$ のように表わされる. そしてその時間的変化に相当することは, σ の変化に対して $|\sigma\rangle$ がどのように変わるかである. σ_x を σ 上の点 x_μ の近傍だけで σ と異なるような空間的超曲面とし, σ_x と σ ではさまれる微小部分の 4 次元体積を ω_x とする (符号は σ_x が σ より未来側にあるときプラス, 過去側のときマイナスとする). すなわち,

$$\omega_x\equiv\int d^3x[f_{\sigma_x}(\boldsymbol{x})-f_\sigma(\boldsymbol{x})] \tag{3}$$

とおく. このとき σ に関する変分を

$$\frac{\delta}{\delta\sigma(x)}|\sigma\rangle\equiv\lim_{\omega_x\to 0}\frac{|\sigma_x\rangle-|\sigma\rangle}{\omega_x} \tag{4}$$

によって定義する. この定義から明らかなように, (4) はたんなる時間微分の拡張ではなく, 同時に空間的にも密度をとる操作を伴っているものである.

4-1 b 相互作用表示 Hamiltonian H は

$$H=H_0+H_I \tag{5}$$

のように自由場の Hamiltonian H_0 と相互作用 Hamiltonian H_I とから成るとする. Schrödinger 方程式は

$$i(\partial/\partial t)|t\rangle_S=H|t\rangle_S \tag{6}$$

である. ここに $|t\rangle_S$ は Schrödinger 表示での時刻 t における状態を表わす.

相互作用表示の状態ベクトル $|t\rangle_I$ を

$$|t\rangle_I \equiv e^{iH_0t}|t\rangle_S \tag{7}$$

によって定義する．そうすると，(6), (5) からそれの満足する方程式は，

$$i(\partial/\partial t)|t\rangle_I = H_I(t)|t\rangle_I \tag{8}$$

となる．ただし

$$H_I(t) \equiv e^{iH_0t}H_I e^{-iH_0t} \tag{9}$$

である．

相互作用は微分結合を含まないとすると，H_I はいくつかの場の演算子 φ_j の多項式を3次元積分したものである．Schrödinger 表示では演算子は時間に依存しないからそれらを $\varphi_j(\boldsymbol{x})$ $(j=1, \cdots, n)$ と書けば，

$$H_I = H_I[\varphi_1(\boldsymbol{x}), \cdots, \varphi_n(\boldsymbol{x})] \tag{10}$$

のように表わせる．そうすると，(9) で定義される $H_I(t)$ は

$$\varphi_j(t, \boldsymbol{x}) \equiv e^{iH_0t}\varphi_j(\boldsymbol{x})e^{-iH_0t} \tag{11}$$

とおくとき

$$H_I(t) = H_I[\varphi_1(t, \boldsymbol{x}), \cdots, \varphi_n(t, \boldsymbol{x})] \tag{12}$$

と書ける．(11) の $\varphi_j(t, \boldsymbol{x})$ は自由場の演算子 $\varphi_j(x)$ にほかならないから，(12) は自由場の演算子で書き表わした相互作用 Hamiltonian であるといえる．2-7 d で述べたように，微分結合がない場合

$$\mathcal{H}_I(x) = -\mathcal{L}_I(x) \tag{13}$$

であったから，(12) は3次元積分を除いて相対論的共変な形をしている．そこで (4) の記号を用いて (8) を

$$i\frac{\delta}{\delta\sigma(x)}|\sigma\rangle_I = \mathcal{H}_I(x)|\sigma\rangle_I \tag{14}$$

と書き改めると，明白に共変な方程式となる．ただし，ここで時刻 t の代りに空間的超曲面 σ を用いたので，$|t\rangle_I$ の代りに $|\sigma\rangle_I$ と書いた．(14) で $\mathcal{H}_I(x)$ は自由場 $\varphi_j(x)$ $(j=1, \cdots, n)$ の多項式にほかならない．(14) を ♦Tomonaga-Schwinger 方程式という．

(14) は無限連立偏微分方程式のようなものだから，解が存在するためには $x_\mu - y_\mu$ が空間的な任意の2点 x_μ, y_μ に対し

$$\frac{\delta^2}{\delta\sigma(x)\delta\sigma(y)}|\sigma\rangle_I = \frac{\delta^2}{\delta\sigma(y)\delta\sigma(x)}|\sigma\rangle_I \tag{15}$$

が成りたっていなければならない．(14) を用いてこれを書き直すと，(15) が任意の $|\sigma_I\rangle$ について成立するためには，

$$[\mathcal{H}_I(x), \mathcal{H}_I(y)] = 0 \qquad ((x-y)^2 < 0 \text{ に対し}) \tag{16}$$

でなければならない．これを ♦積分可能条件 (integrability condition) と

いう．この条件は 2-3 b で述べた局所可換性が満たされていれば少なくとも形式的にはつねに満足される*.

微分結合のある場合は (13) が成立しないから，Tomonaga-Schwinger 方程式 (14) は相対論的に共変にならない．σ 上の点 x_μ における σ の法線方向の単位ベクトル $n_\mu(x)$ を導入して $\mathcal{H}_I(x)$ の代りに $\mathcal{H}_I(x;n(x))$ のような量を考えれば，積分可能条件を満たし共変のような形に式を書くことができる．微分結合がある場合の詳しい考察は省略し，以下直接結合のみと仮定して話を進める．

4-1 c　U 行列　Tomonaga-Schwinger 方程式 (14) は σ という空間的超曲面を用いることによって共変な形に書かれているが，実際問題として σ というものが最後の結果に残ってくることはないので，正直に(14)を解いても，その特別な場合である (8) を解いても結局のところは同じことである．それゆえ，話をわかりやすくするために (8) を解くことにする．(14) の存在は，望むならばそれがいつでも共変な形に書き直せることを保証している．

さて，(8) の解を

$$|t\rangle_I = U(t, t_0)|t_0\rangle_I \tag{17}$$

のように書き表わすことにしよう．そうすると (8) は

$$i(\partial/\partial t)U(t, t_0) = H_I(t)U(t, t_0), \qquad U(t_0, t_0) = 1 \tag{18}$$

と書き直せる．$U(t, t_0)$ は定義と $H_I(x)$ の Hermite 性から

$$U(t, t')U(t', t_0) = U(t, t_0) \tag{19}$$

$$U(t_0, t) = U^{-1}(t, t_0) = U^\dagger(t, t_0) \tag{20}$$

である．

$U(t, t_0)$ はもちろん (9) を (18) に代入して解けば，

$$U(t, t_0) = e^{iH_0 t}e^{-iH(t-t_0)}e^{-iH_0 t_0} \tag{21}$$

であるが，これでは Schrödinger 表示に戻ったのと同じことであって，共変な形にならない．$H_I(t)$ を与えられたものとして (18) を解くことが必要である．そのためにまず (18) を

$$U(t, t_0) = 1 - i\int_{t_0}^{t} dt' H_I(t')U(t', t_0) \tag{22}$$

のように積分方程式の形に書く．$H_I(t)$ が c 数であったならば，(22) は第

* 厳密なことをいえば，$\mathcal{H}_I(x)$ は同時空点の場の演算子の積を含むから，一般に (16) の成否は特異性の処理の仕方に依存する．それで，$\mathcal{H}_I(x)$ に見かけ上共変でないような余分の項をつけ加えないと (16) が満たされないという意見の人もいる．

2種 Volterra(ヴォルテラ)積分方程式と呼ばれるものの特殊の場合であって♦逐次代入法(iteration method)で解が求まることが知られている. すなわち, (22)の左辺の U は右辺で与えられるものと考えてそれを右辺の中の U に代入すると,

$$U(t, t_0)=1+(-i)\int_{t_0}^{t}dt'H_I(t') \\ +(-i)^2\int_{t_0}^{t}dt'H_I(t')\int_{t_0}^{t'}dt''H_I(t'')U(t'', t_0) \tag{23}$$

となる. (23)の右辺の U に再び(22)の右辺を代入する. この操作を無限にくり返すと,

$$\begin{aligned} U(t, t_0)=&\sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n\int_{t_0}^{t}dt^{(1)}\int_{t_0}^{t^{(1)}}dt^{(2)}\cdots\int_{t_0}^{t^{(n-1)}}dt^{(n)}H_I(t^{(1)})H_I(t^{(2)})\cdots \\ &\times H_I(t^{(n)}) \\ =&\sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n\int_{t_0}^{t}dt^{(1)}\cdots\int_{t_0}^{t}dt^{(n)}\theta(t^{(1)}-t^{(2)})\cdots \\ &\times\theta(t^{(n-1)}-t^{(n)})H_I(t^{(1)})\cdots H_I(t^{(n)}) \end{aligned} \tag{24}$$

が得られる. この級数は $H_I(t)$ が c 数ならばつねに収束するが, 今の場合は複雑な演算子であるから形式的である.

さて, 一般に時間の関数で, 同時刻で可換, あるいは反可換な演算子 $\Phi_1(t^{(1)})$, $\cdots$, $\Phi_n(t^{(n)})$ に対して, ♦時間順序積(chronological product あるいは time-ordered product)または♦T 積(T-product)を

$$\mathrm{T}[\Phi_1(t^{(1)})\cdots\Phi_n(t^{(n)})]\equiv\sum_{\sigma}(\mathrm{sgn}\,\sigma_F)\theta(t^{(k_1)}-t^{(k_2)})\theta(t^{(k_2)}-t^{(k_3)})\cdots \\ \times\theta(t^{(k_{n-1})}-t^{(k_n)})\cdot\Phi_{k_1}(t^{(k_1)})\Phi_{k_2}(t^{(k_2)})\cdots\Phi_{k_n}(t^{(k_n)}) \tag{25}$$

によって定義する. ここに σ は置換

$$\sigma\equiv\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n\end{pmatrix} \tag{26}$$

を表わし, 和はすべての置換についてとる. σ_F は Φ_1, $\cdots$, Φ_n のうち同時刻で反可換なものについての置換, すなわち(26)で同時刻で可換な演算子に対応する番号を全部消して空白をつめてできる置換とする. もちろん $\mathrm{sgn}\,\sigma_F$ は σ_F が偶置換ならば $+1$, 奇置換ならば -1 を表わす.

$\Phi_j(t^{(j)})$ として $H_I(t^{(j)})$ をとって(25)の記法を用いると, このときは $\mathrm{sgn}\,\sigma_F=1$ だから, (24)は

$$U(t, t_0)\equiv\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}\int_{t_0}^{t}dt^{(1)}\cdots\int_{t_0}^{t}dt^{(n)}\mathrm{T}[H_I(t^{(1)})\cdots H_I(t^{(n)})] \tag{27}$$

のように積分変数 $t^{(1)}$, $\cdots$, $t^{(n)}$ について対称な形に書き直せる. これを

$$U(t, t_0)=\mathrm{T}\exp(-i)\int_{t_0}^{t}dt'H_I(t') \tag{28}$$

と略記することもある.

4-1 d Dyson の S 行列 $U(t, t_0)$ によって t_0 から t への遷移行列が与えられるわけであるが, われわれは素粒子の反応の起こる 10^{-20} sec というような極端に短い時間内のことを直接観測するわけではない. 反応の起こるずっと前の状態すなわち ♦初期状態 (initial state) と, 反応がすんだずっと後の状態すなわち ♦終状態 (final state) との間の遷移だけが観測にかかるものである. 初期状態, 終状態では各粒子がマクロな距離だけ離れていて相互作用が実質上無視できるものと考えられるから, いくつかの自由な素粒子(あるいは複合粒子)があるような状態であると想定する. そこで $|t\rangle_I$ は, $t\to\pm\infty$ では自由場の Fock 空間の状態ベクトルになるものと仮定する. ただし自由場の質量としては, はだかの質量でなく物理的質量を用いるものとする.

上に述べたような物理的要請をとり入れるために, 少し技巧的であるけれども, 通常 $H_I(t)$ を

$$H_I(t)e^{-\varepsilon|t|} \qquad (\varepsilon>0) \tag{29}$$

のようなものでおきかえる. ここに ε は無限小の量であると考えると, t が有限のところでは何ら変更を生じないが, $t\to\pm\infty$ では相互作用がなくなってしまうと考えられる. $e^{-\varepsilon|t|}$ を ♦断熱因子 (adiabatic factor), 断熱因子を (29) のように導入することを ♦断熱仮設(adiabatic hypothesis)という. 断熱因子の形は必ずしも $e^{-\varepsilon|t|}$ に限ったことはなく, t が有限のところで 1 であり, $t\to\pm\infty$ で十分に速く 0 になる関数ならば何でもよい. 断熱因子を導入して (27) の $t_0\to-\infty$, $t\to+\infty$ の極限をとると

$$S\equiv U(+\infty, -\infty)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-\infty}^{+\infty}dt^{(1)}\cdots \times\int_{-\infty}^{+\infty}dt^{(n)}\mathrm{T}[H_I(t^{(1)})\cdots H_I(t^{(n)})]\exp(-\varepsilon\sum_j|t^{(j)}|) \tag{30}$$

となる. 断熱因子の数学的役割は被積分関数の無限に振動する部分をおとして無限区間の積分が収束するようにすることである. $H_I(t)$ の代りに Hamiltonian 密度 $\mathscr{H}_I(x)$ で表わすと,

$$S=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}\lim_{\varepsilon\to+0}\int d^4x^{(1)}\cdots \times\int d^4x^{(n)}\mathrm{T}[\mathscr{H}_I(x^{(1)})\cdots\mathscr{H}_I(x^{(n)})]\exp(-\varepsilon\sum_j|x_0^{(j)}|) \tag{31}$$

のように共変性の明瞭な形に書ける．これを ♦Dyson の S 行列という．(31) はまた

$$S=\mathrm{T}\exp(-i)\int d^4x\mathcal{H}_I(x)=\mathrm{T}\exp i\int d^4x\mathcal{L}_I(x) \tag{32}$$

のように略記する．

S は $U(t, t_0)$ の t, $-t_0$ を同時に無限大にしたものだから，(20) の unitary 性が保たれる*．すなわち

$$S^\dagger S=1=SS^\dagger \tag{33}$$

である．

S の真空期待値 $\langle 0|S|0\rangle$ は必ずしも 1 に等しくならない．これは真空自身が量子化された場の存在によって影響をうけるために生ずる効果であって，♦真空偏極 (vacuum polarization) と呼ばれる．しかし，S の unitary 性により $\langle 0|S|0\rangle$ の絶対値は 1 に等しいはずだから，たんなる相因子であり物理的に無意味な量である．それゆえ，$S/\langle 0|S|0\rangle$ を改めて S 行列と呼ぶこともある．

4-1 e　遷移行列　Dyson の S 行列では，行列要素は自由場の Fock 空間の基底ベクトルで指定される．それを $\langle b|S|a\rangle$ のように表わすことにする．S は何の反応も起こらないことに相当する部分 1 を含んでおり，またどの反応でもエネルギー運動量は保存するから，本当の反応に関連した部分 T を

$$\langle b|S|a\rangle\equiv\langle b|a\rangle+i(2\pi)^4\delta^4(p_b-p_a)\langle b|T|a\rangle \tag{34}$$

によって定義しておくのが便利である**．ただし，p_a, p_b はそれぞれ $|a\rangle$, $|b\rangle$ の 4 次元運動量で，$T\equiv(\langle b|T|a\rangle)$ は $p_a=p_b$ の上でのみ定義されている行列である．T を ♦遷移行列 (transition matrix) あるいは ♦T 行列という***．

自由場に関し完全規格化直交系が存在するものとすると，(33) の第 1 式は

$$\sum_c\langle b|S^\dagger|c\rangle\langle c|S|a\rangle=\langle b|a\rangle \tag{35}$$

と書ける．不定計量の Hilbert 空間を使っている場合には，$|\alpha\rangle$ が物理的状態ならば $S|\alpha\rangle$ もつねに物理的状態であるという条件が満たされていれ

---

*　片方だけを無限大にした $U(0, -\infty)$ などは，必ずしも逆行列をもたないので unitary 性を保持しない．

**　(34) の第 2 項の符号をマイナスにとる人も多い．

***　R 行列ともいう．

ば，3-2 f で与えた定理により，$|a\rangle$ と $|b\rangle$ が物理的状態のときは $|c\rangle$ として正ノルムの物理的状態だけをとれば，やはり (35) が成立する*. (35) に (34) を代入すると，

$$i\langle b|(T^\dagger-T)|a\rangle=(2\pi)^4\sum_c \delta^4(p_c-p_a)\langle b|T^\dagger|c\rangle\langle c|T|a\rangle \tag{36}$$

という関係式が得られる．とくに $|a\rangle=|b\rangle$ のときは

$$2\,\mathrm{Im}\langle a|T|a\rangle=(2\pi)^4\sum_c \delta^4(p_c-p_a)|\langle c|T|a\rangle|^2\geqq 0 \tag{37}$$

となる．

単位時空間ごとの遷移確率(の終状態運動量空間での密度)は，(34) から

$$w_{ba}\equiv(2\pi)^4\delta^4(p_b-p_a)|\langle b|T|a\rangle|^2 \tag{38}$$

で与えられるものと考えられる．それは

$$(2\pi)^4\delta^4(p_b-p_a)=\int d^4x\,\exp[-i(p_b-p_a)x] \tag{39}$$

なるゆえ，$p_a=p_b$ 上ではこれは全 4 次元時空間の体積とみなせるからである．もっと合理的に (38) を導くにはエネルギー運動量の固有状態を使わないでやらなければならないので，面倒だから省略する．(38) を (37) に代入すれば

$$2\,\mathrm{Im}\langle a|T|a\rangle=\sum_b w_{ba} \tag{40}$$

となる．

4-1 f 散乱断面積 初期状態が 2 粒子の場合は，2 粒子の相対的速さ** を v，各粒子の確率密度を ρ_1，ρ_2 とすれば***，♦微分断面積 (differential cross section) は $w_{ba}/v\rho_1\rho_2$ を終状態の 3 次元運動量について微小領域で積分することによって得られる．微分断面積をすべての $|b\rangle$ について加え合わせたものが ♦全断面積 (total cross section) である．(40) は全断面積が $\mathrm{Im}\langle a|T|a\rangle$ に比例することを示す．この事実を ♦光学定理 (optical theorem) と呼んでいる．

なお，不安定な粒子の ♦崩壊確率 (decay rate) $1/\tau$ も，崩壊相互作用について最低次の近似では，全断面積と同様の方法で計算ができる．ただし

---

* しかしながら，$|a\rangle$ が物理的状態，$|d\rangle$ が非物理的状態であっても一般には $\langle d|S|a\rangle\neq 0$ であることに注意せよ．なぜなら，$\mathfrak{V}_{\rm phys}$ が縮退している場合はその直交補空間は存在しないからである (3-2 f 参照).

** 2 粒子が同一直線上を運動する座標系からみた速度を $\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$ としたとき $v=|\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2|$.

*** 自由粒子については $\rho_1=\rho_2=(2\pi)^{-3}$ (4-4 参照).

$|a\rangle$ が 1 粒子状態だから，$v\rho_1\rho_2$ のところをはじめの不安定粒子の確率密度 ρ におきかえるものとする．

4-1 g　τ 関数　本項に限り，相互作用表示の演算子と区別するために，Heisenberg 表示の演算子を太字で表わすことにする．

Heisenberg 演算子の T 積の真空期待値

$$\tau(x^{(1)}, \cdots, x^{(m)}) \equiv \langle \mathbf{0}|\mathrm{T}[\boldsymbol{\varphi}_1(x^{(1)})\cdots\boldsymbol{\varphi}_m(x^{(m)})]|\mathbf{0}\rangle \qquad (41)$$

を一般に ♦τ 関数あるいは ♦Green 関数と呼ぶ．これを相互作用表示で表わすことを考える．一般の場合でも全く同じように扱えるので，記述の簡略のため

$$\tau(x, y) \equiv \langle \mathbf{0}|\mathrm{T}[\boldsymbol{\varphi}(x)\boldsymbol{\varphi}(y)]|\mathbf{0}\rangle \qquad (42)$$

について考える．

$x_0=0$ で Heisenberg 表示と Schrödinger 表示が一致するものとすると，

$$\boldsymbol{\varphi}(x) = e^{i\boldsymbol{H}x_0}\varphi(\boldsymbol{x})e^{-i\boldsymbol{H}x_0} \qquad (43)$$

である．したがって，相互作用表示での $\varphi(x)$ との関係は，(11) から

$$\boldsymbol{\varphi}(x) = e^{i\boldsymbol{H}x_0}e^{-iH_0x_0}\varphi(x)e^{iH_0x_0}e^{-i\boldsymbol{H}x_0} \qquad (44)$$

となる．それゆえ

$$\langle \mathbf{0}|\boldsymbol{\varphi}(x)\boldsymbol{\varphi}(y)|\mathbf{0}\rangle = \langle \mathbf{0}|e^{i\boldsymbol{H}x_0}e^{-iH_0x_0}\varphi(x)e^{iH_0x_0}e^{-i\boldsymbol{H}(x_0-y_0)} \times e^{-iH_0y_0}\varphi(y)e^{iH_0y_0}e^{-i\boldsymbol{H}y_0}|\mathbf{0}\rangle \qquad (45)$$

である．(45) に (21) を代入すると，

$$\langle \mathbf{0}|\boldsymbol{\varphi}(x)\boldsymbol{\varphi}(y)|\mathbf{0}\rangle = \langle \mathbf{0}|U(0, x_0)\varphi(x)U(x_0, y_0)\varphi(y)U(y_0, 0)|\mathbf{0}\rangle \quad (46)$$

と書ける．

さて，$|\mathbf{0}\rangle$ は本当の真空であって，断熱仮設によって相互作用を抜き去った自由場の真空 $|0\rangle$ とは異なる．$x_0=0$ では Heisenberg 表示も Schrödinger 表示も相互作用表示も全部一致しているから，

$$|\mathbf{0}\rangle = e^{i\theta}U(0, -\infty)|0\rangle, \qquad \langle \mathbf{0}| = e^{-i\theta'}\cdot\langle 0|U(+\infty, 0) \qquad (47)$$

と書けるはずである*．ただし未定の相因子 $e^{i\theta}$, $e^{-i\theta'}$ は $\langle \mathbf{0}|\mathbf{0}\rangle=1$ から

$$e^{-i(\theta-\theta')} = \langle 0|S|0\rangle \qquad (48)$$

を満たさねばならない．これを (46) に代入すると

$$\langle \mathbf{0}|\boldsymbol{\varphi}(x)\boldsymbol{\varphi}(y)|\mathbf{0}\rangle = \langle 0|U(+\infty, x_0)\varphi(x)U(x_0, y_0)\varphi(y)U(y_0, -\infty)|0\rangle/\langle 0|S|0\rangle \quad (49)$$

---

* $U(0, -\infty)$, $U(+\infty, 0)$ はもちろん断熱因子を入れて極限をとったものである．

となる．それゆえ，U に対し時間順序積の表示を用いると，

$$\langle 0|\mathrm{T}[\boldsymbol{\varphi}(x)\boldsymbol{\varphi}(y)]|0\rangle$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}\lim_{\varepsilon\to+0}\int d^4x^{(1)}\cdots\int d^4x^{(n)}\exp(-\varepsilon\sum_j|x_0^{(j)}|)$$
$$\times\langle 0|\mathrm{T}[\mathscr{H}_I(x^{(1)})\cdots\mathscr{H}_I(x^{(n)})\varphi(x)\varphi(y)]|0\rangle/\langle 0|S|0\rangle \qquad (50)$$

という関係式を得る．これを

$$\tau(x,y)=\langle 0|\mathrm{T}[S\varphi(x)\varphi(y)]|0\rangle/\langle 0|S|0\rangle \qquad (51)$$

と略記するが，ここの T は S に (30) を代入し，その被積分関数の段階でとらなければならないことはもちろんである．この記法を用いると，一般の場合

$$\tau(x^{(1)},\cdots,x^{(m)})=\langle 0|\mathrm{T}[S\varphi(x^{(1)})\cdots\varphi(x^{(m)})]|0\rangle/\langle 0|S|0\rangle \quad (52)$$

となる．

(52) において $x_0^{(1)},\cdots,x_0^{(k)}$ を $+\infty$ へ，$x_0^{(k+1)},\cdots,x_0^{(m)}$ を $-\infty$ へ近づけると，

$$\langle 0|\mathrm{T}[\boldsymbol{\varphi}_1^{\mathrm{out}}(x^{(1)})\cdots\boldsymbol{\varphi}_k^{\mathrm{out}}(x^{(k)})]\mathrm{T}[\boldsymbol{\varphi}_{k+1}^{\mathrm{in}}(x^{(k+1)})\cdots\boldsymbol{\varphi}_m^{\mathrm{in}}(x^{(m)})]|0\rangle$$
$$=\langle 0|\mathrm{T}[\varphi_1(x^{(1)})\cdots\varphi_k(x^{(k)})]S\,\mathrm{T}[\varphi_{k+1}(x^{(k+1)})\cdots\varphi_m(x^{(m)})]|0\rangle/\langle 0|S|0\rangle \qquad (53)$$

のように書けるであろう．$\boldsymbol{\varphi}_j^{\mathrm{out}}$ からは消滅演算子，$\boldsymbol{\varphi}_j^{\mathrm{in}}$ からは生成演算子を抜き出す線形演算をほどこせば*，右辺でも同じ自由場の方程式を満たしている φ_j に対して全く同じように消滅，生成演算子がとり出される．このことから，2–8 の (45) で与えた漸近場による S 行列の定義と本節の Dyson の S 行列の定義とが等価であることがわかる．

4–2 Feynman 図

Dyson の S 行列の式 4–1 の (31) は $\mathscr{H}_I(x)=-\mathscr{L}_I(x)$ についてのベキ級数の形で書かれている．通常 $\mathscr{L}_I(x)$ は結合常数について 1 次であるので**，これは結合常数についてのベキ級数展開ともみることができる．一般に結合常数のベキ級数を •摂動級数 (perturbation series)，S 行列や τ

* その具体的なやり方は LSZ 形式に従えばよいが，ここでは具体的な方法は必要でない．

** 荷電スカラー場の電磁相互作用は，3–4 の (21) に見られるように，$\mathscr{L}_I(x)$ が e^2 の項を含むのでこの部分は調整が必要である．

関数などを摂動級数展開で計算することを ♦摂動論(perturbation theory)という*．摂動論にはもう1つ別に ♦旧式摂動論(old-fashioned perturbation theory)と呼ばれる，量子力学でよく用いられる方法がある．しかしこれはエネルギーを特別扱いにするためもちろん共変的でなく，場の量子論に適用すると極めて複雑かつ見通しの悪いものとなり，ほとんど実用にならない**．それゆえ今日では，場の量子論でたんに摂動論といえば以下に説明する Feynman 式計算法を指すことになっている．

本節では，はじめに Wick(ウィック)の定理を与え，それから Feynman 図とそれに関連した注意事項を述べる．

4-2 a 正規積 Dyson の S 行列の各項を計算することは，結局

$$\langle b|\mathrm{T}[\mathcal{L}_I(x^{(1)})\cdots\mathcal{L}_I(x^{(n)})]|a\rangle \tag{1}$$

のような行列要素を計算することである．そのためには，T 積になっている演算子を分解して，消滅演算子を全部右へ寄せ生成演算子を全部左へ寄せてしまったものの和に書き直すのが便利である．なぜなら，こうすれば(1)が直ちに c 数の形で読みとれるからである．

一般に $\varphi_j(x)$ を自由場の演算子，$\varphi_j^{(+)}(x)$, $\varphi_j^{(-)}(x)$ をそれぞれその消滅演算子の部分，生成演算子の部分とするとき，

$$\prod_j \varphi_j^{(-)}(x^{(j)})\prod_k \varphi_k^{(+)}(x^{(k)}) \tag{2}$$

のように，すべての消滅演算子がすべての生成演算子の右にくるような積を ♦正規積(normal product)あるいは ♦N 積(N-product)という．正規積の形になっていない積で正規積を表わしたいときは記号 N あるいは：：を用いる．ただしこの場合は，これによって生ずる局所反可換な演算子同士の置換を σ_F とするとき，$\mathrm{sgn}\,\sigma_F$ を乗ずるものとする．たとえば，スピノル場に関して

$$\mathrm{N}[\psi_\alpha^{(+)}(x)\bar{\psi}_\beta^{(-)}(y)]\equiv\,:\psi_\alpha^{(+)}(x)\bar{\psi}_\beta^{(-)}(y):\,\equiv-\bar{\psi}_\beta^{(-)}(y)\psi_\alpha^{(+)}(x) \tag{3}$$

である．場の演算子 $\varphi_j(x)$ 自身の積に関しては

$$\varphi_j(x)=\varphi_j^{(+)}(x)+\varphi_j^{(-)}(x) \tag{4}$$

を代入して展開し，その各項について正規積をとったものを $:\prod_j \varphi_j:$ と定義する．たとえば

---

* 摂動という言葉は，もともと天体力学の用語で主要な力につけ加わる微小な力を指す．

** ただし，運動量無限大のような特別な Lorentz 系では便利なことがある．

$$:\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y): \equiv \psi_\alpha{}^{(+)}(x)\bar{\psi}_\beta{}^{(+)}(y)+\psi_\alpha{}^{(-)}(x)\bar{\psi}_\beta{}^{(+)}(y) \\ -\bar{\psi}_\beta{}^{(-)}(y)\psi_\alpha{}^{(+)}(x)+\bar{\psi}_\alpha{}^{(-)}(x)\bar{\psi}_\beta{}^{(-)}(y) \\ =-\bar{\psi}_\beta{}^{(+)}(y)\psi_\alpha{}^{(+)}(x)+\psi_\alpha{}^{(-)}(x)\bar{\psi}_\beta{}^{(+)}(y) \\ -\bar{\psi}_\beta{}^{(-)}(y)\psi_\alpha{}^{(+)}(x)-\bar{\psi}_\beta{}^{(-)}(y)\bar{\psi}_\alpha{}^{(-)}(x) \qquad (5)$$

となる．この定義から，質量 μ の中性スカラー場 $\phi(x)$，質量 m のスピノル場 $\psi(x)$ に対し次の等式が成りたつ．

$$\phi(x)\phi(y)=:\phi(x)\phi(y):+[\phi^{(+)}(x),\ \phi^{(-)}(y)] \qquad (6)$$

$$\hat{\psi}_\alpha(x)\hat{\psi}_\beta(y)=:\hat{\psi}_\alpha(x)\hat{\psi}_\beta(y):+\{\hat{\psi}_\alpha{}^{(+)}(x),\ \hat{\psi}_\beta{}^{(-)}(y)\} \qquad (7)$$

$$\phi(x)\hat{\psi}_\beta(y)=:\phi(x)\hat{\psi}_\beta(y): \qquad (8)$$

ただし，$\hat{\psi}$ は ψ あるいは $\bar{\psi}$ を表わすものとする．$\phi(x)$, $\hat{\psi}(x)$ は自由場であるから，

$$[\phi^{(+)}(x),\ \phi^{(-)}(y)]=\Delta^{(+)}(x-y\,;\,\mu^2)=-\Delta^{(-)}(y-x\,;\,\mu^2) \qquad (9)$$

$$\{\psi_\alpha{}^{(+)}(x),\ \bar{\psi}_\beta{}^{(-)}(y)\}=S_{\alpha\beta}{}^{(+)}(x-y\,;\,m) \qquad (10)$$

$$\{\bar{\psi}_\beta{}^{(+)}(y),\ \psi_\alpha{}^{(-)}(x)\}=S_{\alpha\beta}{}^{(-)}(x-y\,;\,m) \qquad (11)$$

$$\{\psi_\alpha{}^{(+)}(x),\ \psi_\beta{}^{(-)}(y)\}=\{\bar{\psi}_\alpha{}^{(+)}(x),\ \bar{\psi}_\beta{}^{(-)}(y)\}=0 \qquad (12)$$

である．したがって

$$\mathrm{T}[\phi(x)\phi(y)]-:\phi(x)\phi(y): \\ =\theta(x_0-y_0)[\phi^{(+)}(x),\ \phi^{(-)}(y)]+\theta(y_0-x_0)[\phi^{(+)}(y),\ \phi^{(-)}(x)] \\ =\theta(x_0-y_0)\Delta^{(+)}(x-y\,;\,\mu^2)-\theta(y_0-x_0)\Delta^{(-)}(x-y\,;\,\mu^2) \\ =\Delta_F(x-y\,;\,\mu^2)\ \ (=\langle 0|\mathrm{T}[\phi(x)\phi(y)]|0\rangle) \qquad (13)$$

$$\mathrm{T}[\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)]-:\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y): \\ =\theta(x_0-y_0)\{\psi_\alpha{}^{(+)}(x),\ \bar{\psi}_\beta{}^{(-)}(y)\}-\theta(y_0-x_0)\{\bar{\psi}_\beta{}^{(+)}(y),\ \psi_\alpha{}^{(-)}(x)\} \\ =\theta(x_0-y_0)S_{\alpha\beta}{}^{(+)}(x-y\,;\,m)-\theta(y_0-x_0)S_{\alpha\beta}{}^{(-)}(x-y\,;\,m) \\ =S_{F,\alpha\beta}(x-y\,;\,m)\ \ (=\langle 0|\mathrm{T}[\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)]|0\rangle) \qquad (14)$$

となる．

一般に $\langle 0|\mathrm{T}[\varphi_1(x)\varphi_2(y)]|0\rangle$ を本節に限り $\langle\varphi_1\varphi_2\rangle$ と略記すれば，

$$\mathrm{T}(\varphi_1\varphi_2)=:\varphi_1\varphi_2:+\langle\varphi_1\varphi_2\rangle \qquad (15)$$

が成りたつ．このことは正規積の真空期待値が 0 であることからも当然である．

4-2 b　Wick の定理　同様の考察により

$$\mathrm{T}(\varphi_1\varphi_2\varphi_3)=:\varphi_1\varphi_2\varphi_3:+\langle\varphi_1\varphi_2\rangle\varphi_3\pm\langle\varphi_1\varphi_3\rangle\varphi_2+\varphi_1\langle\varphi_2\varphi_3\rangle \qquad (16)$$

となることがすぐ確かめられる．ただし右辺第 3 項の複号は φ_2, φ_3 がともに局所反可換のときのみマイナスをとり，他のときはプラスをとるもの

とする．(15), (16) を一般の n 個の積の場合に拡張したのが ♦Wick の定理である．

[Wick の定理]

$$\mathrm{T}(\varphi_1\varphi_2\cdots\varphi_n)=\sum_{\mathrm{div}}(\mathrm{sgn}\,\sigma_F)\langle\varphi_{k_1}\varphi_{k_2}\rangle\langle\varphi_{k_3}\varphi_{k_4}\rangle\cdots \times\langle\varphi_{k_{2m-1}}\varphi_{k_{2m}}\rangle:\varphi_{k_{2m+1}}\varphi_{k_{2m+2}}\cdots\varphi_{k_n}: \tag{17}$$

ただし，和は $(1, 2, \cdots, n)$ の中から m 個（m は $0\leqq m\leqq n/2$ の範囲で動かす）の数の対を選び出すすべての可能な組み合せについてとる．$\mathrm{sgn}\,\sigma_F$ の定義は前節の T 積の定義のときのそれと同じである．また，もちろん $:\varphi_j:\equiv\varphi_j$, $:1:\equiv1$ とする．

この定理の証明にはまず次のことに注意する．(17) の両辺とも φ_1, φ_2, $\cdots$, φ_n の任意の置換に対し，共通の符号の変化を除いては不変な式である．したがって，$\varphi_1\varphi_2\cdots\varphi_n$ という積の順序は時間順序と一致しているものと仮定しても一般性を失わない．このとき (17) は

$$\varphi_1\varphi_2\cdots\varphi_n=\sum_{\mathrm{div}}(\mathrm{sgn}\,\sigma_F)\langle\varphi_{k_1}\varphi_{k_2}\rangle^{(+)}\cdots\langle\varphi_{k_{2m-1}}\varphi_{k_{2m}}\rangle^{(+)}:\varphi_{k_{2m+1}}\cdots\varphi_{k_n}: \tag{18}$$

と書くことができる．ただし

$$k_{2i-1}<k_{2i}\qquad(i=1, 2, \cdots, m) \tag{19}$$

で，

$$\begin{aligned}\langle\varphi_j\varphi_k\rangle^{(+)}&=\{\varphi_j^{(+)}, \varphi_k^{(-)}\}\qquad(\varphi_j, \varphi_k\ \text{がともに局所反可換のとき})\\&=[\varphi_j^{(+)}, \varphi_k^{(-)}]\qquad(\text{それ以外})\end{aligned} \tag{20}$$

とする．

(18) に (4) を代入し，左辺の積と右辺の正規積をばらして各項を比較すれば，

$$\varphi_1^{(\epsilon_1)}\varphi_2^{(\epsilon_2)}\cdots\varphi_n^{(\epsilon_n)}=\sum_{\mathrm{div}}{}'(\mathrm{sgn}\,\sigma_F)\langle\varphi_{k_1}\varphi_{k_2}\rangle^{(+)}\cdots \times\langle\varphi_{k_{2m-1}}\varphi_{k_m}\rangle^{(+)}:\varphi_{k_{2m+1}}{}^{(\epsilon)}\cdots\varphi_{k_n}{}^{(\epsilon)}: \tag{21}$$

（$\varphi_{k_i}{}^{(\epsilon)}$ の ϵ は ϵ_{k_i} の略）

を得る．ただし，(ϵ_k) は $(+)$ または $(-)$ を表わし，和は $(\epsilon_{k_{2i-1}})=(+)$, $(\epsilon_{k_{2i}})=(-)$ $(i=1, 2, \cdots, m)$ で，かつ (19) の条件を満たすすべての独立な場合についてとる．(21) はもちろん (18) と等価である．

ところが (20) を書き直した式

$$\varphi_j^{(+)}\varphi_k^{(-)}=\pm\varphi_k^{(-)}\varphi_j^{(+)}+\langle\varphi_j\varphi_k\rangle^{(+)} \tag{22}$$

をくり返し用いて，(21) の左辺の $\varphi_j^{(+)}$ を番号のうしろのものから順にす

べて $\varphi_k^{(-)}$ の右へもっていくと (21) の右辺を得るから*, (21) が成立する. したがって (17) が成立する. (証明終)

4-2 c $\mathcal{L}_I(x)$ の再定義 $\mathcal{L}_I(x)$ は同時空点の場の演算子の多項式であるから, なるべくその特異性を小さくするように定義することが望ましい. そのため, $\mathcal{L}_I(x)$ の各項は場の演算子のたんなる積ではなく, それらの正規積であると定義し直す. このおきかえによって, もちろん相互作用の本質的な部分は何ら変更を受けない. しかも正規積は Lorentz 不変性や時空に無関係な対称性をそのままに保つ. とくに荷電共役は, 消滅演算子は消滅演算子に, 生成演算子は生成演算子に写すような変換だから, 正規積の方が荷電共役不変性が明瞭化される. また

$$\langle 0|\mathcal{H}_I(x)|0\rangle = -\langle 0|\mathcal{L}_I(x)|0\rangle = 0 \tag{23}$$

となることも物理的に合理的である. それゆえ, 今後 $\mathcal{L}_I(x)$ は正規積で定義されているものとする.

このとき (1) のような T 積は, 場の演算子で書くと同時空点の場の演算子の正規積を含む T 積である. このような T 積に対する Wick の定理は, φ_j と φ_k がはじめから同一の正規積に入っていたときには $\langle\varphi_j\varphi_k\rangle=0$ とするという付帯条件をつけておけばそのまま成立する.

4-2 d Feynman 図 さて, Wick の定理を適用して (1) を計算することを考えてみよう. もし $|a\rangle$ のどの粒子も $|b\rangle$ のどの粒子とも全く同じ状態(粒子の種類, 運動量, スピンの向きの全部が同じ)にはないと仮定すれば, (17) のうちで生き残る項は, 正規積の部分がちょうど $|a\rangle$ の粒子を全部消滅させ, しかるのちに $|b\rangle$ の粒子を全部生成するものだけである. だから行列要素 (1) を計算するには, そのような正規積のある項の係数を調べればよいわけである. $|a\rangle$ と $|b\rangle$ に全く同一状態の粒子があるときは, 正規積の部分を経ないで直接 $|a\rangle$ から $|b\rangle$ にいくことが可能だが, そのような粒子は反応には無関係だから無視して差し支えない.

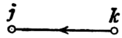
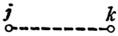
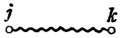
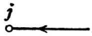
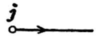
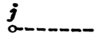
具体例として 2-7 の (7) の相互作用 Lagrangian 密度

$$\mathcal{L}_I(x) = g_P : \bar{\psi}(x)\gamma^5\psi(x)\phi(x) : \tag{24}$$

の場合を考えてみよう. このとき $\langle\varphi_j\varphi_k\rangle$ のうち 0 にならないのは (13), (14) の場合だけである. これらを一般に ♦Feynman 伝播関数 (Feynman propagator) と呼ぶ. Feynman 伝播関数のどのような積が現われるかを

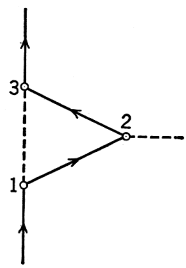
* これは (21) の式の意味が理解されていれば直観的に明らかであろう. 証明は数学的帰納法によればよい.

わかりやすくするために，次のような図形的方法を用いるのが便利である．

まず各時空座標 $x^{(j)}$ に微小円○に文字 j を添えたものを対応させ，♦頂点(vertex)と呼ぶ．次に Feynman 伝播関数 $S_F(x^{(j)}-x^{(k)};m)$, $\varDelta_F(x^{(j)}-x^{(k)};\mu^2)$ をそれぞれ頂点 k と頂点 j をつなぐ矢実線 ，点線  で図示する(電磁場のときは波線  を用いる)．これらを♦内線(internal line)と総称し，その端になっている頂点を♦端点(end vertex)という．正規積の中の演算子 $\psi(x^{(j)})$, $\bar{\psi}(x^{(j)})$, $\phi(x^{(j)})$ はそれぞれ , ,  のように端点の1つしかない線で表わし，♦外線(external line)と総称する．このような図示方法により，(17)の各項には内線と外線と頂点から成る1つの図形が対応することになる．このような図形を♦Feynman 図(Feynman graph あるいは Feynman diagram)という．たとえば，

$$:\bar{\psi}(x^{(3)})\gamma^5 S_F(x^{(3)}-x^{(2)};m)\gamma^5 S_F(x^{(2)}-x^{(1)};m)\gamma^5\psi(x^{(1)})\phi(x^{(2)}): \\ \times\varDelta_F(x^{(3)}-x^{(1)};\mu^2) \tag{25}$$

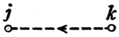
には4·1図のような Feynman 図が対応する．ここで重要なことは，どの頂点にも矢実線が2本(うち1本は内向き，もう1本は外向き)入り，点線が1本入っていることである．これは相互作用 Lagrangian 密度(24)の形から当然である．逆に，頂点が n 個ある Feynman 図がすべての頂点においてこの条件を満たしているときは，必ず(17)の中に対応する項がただ1つ存在する．ただし，$\mathcal{L}_I(x)$ で正規積をとったことに対応して両端点が同一の頂点であるような内線は禁止するものとする．このように $\mathcal{L}_I(x)$ の形は各頂点の線の入り方を決める．



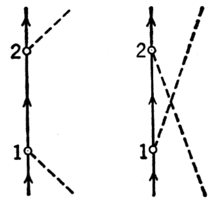
4·1 図

初期状態あるいは終状態にある粒子と外線とは一対一に対応するが，そのどちらの状態にあるのかを明示するために，Feynman 図では初期状態に対応する外線を下側に終状態に対応する外線を上側に描くか，あるいは前者を左側に後者を右側に描く．本書では上下による描き方を採用する．

4-2 e　交差対称性　♦交差対称性についてはすでに 1-5 i で説明したが，この概念は Feynman 図において最も明瞭になる．Feynman 図で矢線を用いるのは粒子と反粒子が一致しないものについてである．したがっ

て複素スカラー場については矢点線  を用いる．スピノル場の Feynman 伝播関数 $\langle 0|\mathrm{T}[\psi(x^{(j)})\bar{\psi}(x^{(k)})]|0\rangle$ の ψ, $\bar{\psi}$ に 2-5 の (37), (38) を代入してみればわかるように，これは $x^{(k)}$ から $x^{(j)}$ に伝播する粒子と，$x^{(j)}$ から $x^{(k)}$ へ伝播する反粒子とを同時に表わしたものである．換言すれば，粒子は矢印の向きに，反粒子は矢印と逆の向きに進行していると考えられる．同様に，内向きの外線は初期状態の粒子あるいは終状態の反粒子に対応し，外向きの外線は初期状態の反粒子あるいは終状態の粒子に対応する．初期状態のものか終状態のものかは，Feynman 図ではそれらを下側に描くか上側に描くかだけの違いである．

このように，一般に交差対称性によって結びつく反応は，本質的に同じ Feynman 図で表わされるものである．とくにある種の交差対称の変換に対して不変になるような反応の場合には，その交差対称で移れる 2 つの Feynman 図をつねに対にして含んでいなければならない．このことを狭義で交差対称ということもある．4·2 図はその 1 例で，交差という言葉の由来でもある．



4·2 図

4-2 f 統計因子 相互作用 Lagrangian 密度の別な例として，2-7 の (2), (3) を一般化した形の

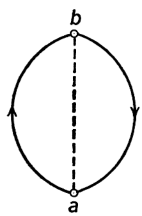
$$\mathcal{L}_I(x)=(g/m!):\phi^m(x): \tag{26}$$

を考えてみよう．各頂点にはちょうど m 個の点線が入る．

さて，問題は $:\phi^m(x^{(j)}):$ の T 積を Wick の定理で展開する場合の Feynman 伝播関数の作り方の数である．頂点 j を端点にもつ m 個の内線または外線に用いた $\phi(x^{(j)})$ はそれぞれそれが $\mathcal{L}_I(x^{(j)})$ の中のどの $\phi(x^{(j)})$ であるかは決められない．どの $\phi(x^{(j)})$ をどの線に対応するとみるかは，順列の数 $m!$ 通りだけの仕方があるわけである．この $m!$ はちょうど (26) の g の分母の $m!$ と相殺する．ただし，頂点 j に入る s 個 ($s\leqq m$) の内線が同じ他端点 k をもつ場合は，この s 本の内線の分について，$\phi(x^{(j)})$ のいれかえと $\phi(x^{(k)})$ のいれかえとは同じことを重複してやっていることになり，数えすぎになる．したがって，一般に s 個の両端点共通な同一粒子の内線(矢印のあるときは向きまで同一のものだけについて)があるときは，そのおのおのについて $1/s!$ だけの因子が相殺されずに残ることになる．これを •統計因子 (statistical factor) と呼ぶ*(脚注は次頁)．

4-2 g　対称性因子　n 個の頂点をもつ Feynman 図が (17) のある 1 項に対応しているとき，それの頂点の番号に任意の置換をほどこして得られる Feynman 図は明らかに (17) のある 1 項に対応するはずである（これは $\mathcal{L}_I(x^{(j)})$ の間のいれかえに対応することだから符号変化は生じない）．それゆえ，各頂点の番号を置換して得られるものは，$x^{(1)}, \cdots, x^{(n)}$ について積分すると同じ式になるゆえ一括して考える方が経済的である．この場合は頂点の名前を特定の $x^{(j)}$ と対応させないでつける必要があるので，たんなる番号でなく $a, b, \cdots$ や a_j のような記号を用いることにする．

さて，Feynman 図が特別の対称性をもたなければ，その n 個の頂点 $a_1, \cdots, a_n$ と n 個の時空座標 $x^{(1)}, \cdots, x^{(n)}$ とを一対一に対応させる仕方は $n!$ 通りであるから，$n!$ 個の項が一括して考えられる．この $n!$ はちょうど Dyson の S 行列の式 4-1 の (31) の係数 $1/n!$ と相殺する．しかし，4·3 図のような Feynman 図では，頂点 a, b をいれかえても元と同じものであるから 2! 個の項が対応しない．このような特別な対称性をもつ Feynman 図では $1/n!$ が完全に相殺されず $1/r$ のような因子が残る．r は Feynman 図を不変にする頂点の名前の置換の数で，*対称性因子(permutation symmetry factor)と呼ぶことにする．Feynman 図が同じかどうかということの判定において，内線についてはそれは伝播関数を表わすだけだから粒子の種類と矢印の向きが一致していれば区別できないが，外線についてはそれは特定の運動量をもつ粒子を表わすのだからすべて区別できるものと考えている．このため外線のある Feynman 図では対称性因子が 1 になる場合が多い．実際，次の定理が成りたつ．



4·3 図

［定理］　$\mathcal{L}_I(x)$ が ((24) の例のように) 相異なる場の演算子の積である場合には，外線が 1 本でもある連結な** Feynman 図では対称性因子はつねに 1 に等しい．

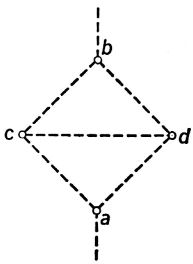
---

*　統計因子はまた全断面積の計算のときにも現われる．それは終状態に同一粒子が s 個あると，そのままそれらの運動量積分をやれば同じものを $s!$ 回勘定することになるので，$1/s!$ を掛けなければならないからである．この統計因子は光学定理を通じて，上述の統計因子と関係してくる．

**　連結とはもちろんひとつながりになっているということである．

証明は頂点の数について数学的帰納法を用いる．頂点の数が 1 個のときは自明であるから，頂点の数が n に満たないときは，外線が 1 本でもある連結な Feynman 図では，Feynman 図を不変にする頂点の置換は恒等置換以外にないとする．n 個の頂点と少なくとも 1 本の外線をもつ任意の連結な Feynman 図 G において，少なくも 1 つの外線が入っている頂点の 1 つを a とすると，外線はそれぞれ区別できるのだから G を不変にする頂点の置換は a を動かさない．G から頂点 a をとり除いてできる Feynman 図を G^a とする．G^a では a に入っている G の内線は外線におきかえるものとする．仮定によりこれらの G の内線はすべて相異なる内線だから，これらが外線にかわっても頂点の置換に関する不変性に影響を与えない．したがって，G を不変にする置換は G^a も不変にする．ところで G^a は外線をもつ連結な Feynman 図であるかまたはそのようなものの合併で，頂点の数は n に満たないから，帰納法の仮定により G^a を不変にする頂点の置換は恒等置換しかない．ゆえに G についてもそうである．(証明終)

$\mathcal{L}_I(x)$ が同一の演算子の積を含む場合には，外線をもつ連結な Feynman 図でも $r \neq 1$ でありうる．たとえば，(26) の $m=3$ のときの $\mathcal{L}_I(x)$ の場合で 4·4 図のような例ができる．これは c と d とのいれかえに対し不変である．



4·4 図

$r \neq 1$ の Feynman 図の対称性因子を一般的に勘定するのは非常に難しい問題である．

4-2 h　符号因子　Wick の定理 (17) は $\mathrm{sgn}\,\sigma_F$ を含んでいる．これは Fermi 統計に従うスピノル場の演算子の順序だけに関係する．相互作用 Lagrangian 密度は通常 $\bar{\psi}$ と ψ とを対にして含んでいるので ($\bar{\psi}$ と ψ が相異なるスピノル場に対応する場合もありうるが)，1 つの頂点に入る内向きの矢実線の数と外向きの矢実線の数はつねに相等しい．それゆえ，スピノル場の矢実線は外線から外線までずっとひと続きになっているものと考えることができる．外線の 1 つから出発してスピノル場の Feynman 伝播関数をこの順序に並べていくのが便利である ((25) 参照)．こうすると，元の T 積での順序から $\bar{\psi}$ と ψ をいつでも対にしたままで順序を変えたことになるので，この部分に関しては符号変化を考慮する必要がなくなり，初期状態あるいは終状態のスピノル粒子の順序いれかえだけを考慮すればよい．これを '状態符号因子

(state sign factor) と呼ぶことにする.

外線とつながらないスピノル場の矢実線は次々とたどっていくと，円周のように元のところへ戻ってくるはずである (4·3 図参照). このようなものを一般に ♦ループ (closed loop) と呼ぶ. この場合は $\bar{\psi}_1\psi_1\cdot\bar{\psi}_2\psi_2\cdot\cdots\cdot\bar{\psi}_k\psi_k$ のように並んでいたものを $\langle\psi_k\bar{\psi}_1\rangle\langle\psi_1\bar{\psi}_2\rangle\cdots\langle\psi_{k-1}\bar{\psi}_k\rangle$ のように順序を改めなければならないのだから必ず奇置換になる. したがって，ループ 1 個ごとにマイナスの符号が 1 つかかる. すなわち，Feynman 図に含まれるループの数を L とすれば $(-1)^L$ という因子がかかることになる. これを ♦ループ符号因子 (loop sign factor) と呼ぶ.

なお，ループにおいて添字に関する和はこの部分だけで閉じて行なわれるわけだから，ループの部分の Feynman 伝播関数の積の中に含まれるガンマ行列に関してはトレースをとることになる.

4-2 i 真空偏極 真空偏極は $\langle 0|S|0\rangle$ で与えられるが，摂動級数展開したときの具体的な式は，外線の全くない Feynman 図(たとえば 4·3 図)に対応する行列要素にほかならない. このような Feynman 図は一般にはいくつかの連結成分から成るだろう. このうち連結な Feynman 図からの寄与の総和を $i\Lambda$ とすると，それは無限大であるが，5-2 j で示されるように $\mathrm{Im}\,\Lambda=0$ である. 2 個の連結成分から成るものの総和は $(i\Lambda)^2/2$ に等しい. なぜなら，$(i\Lambda)^2$ を展開すると同形でない 2 つの連結成分から成る Feynman 図は 2 回でてくることになるので 2 で割る必要があり，また同形の連結成分 2 個から成る Feynman 図の場合は両者をいれかえる対称性があるので対称性因子 1/2 が含まれる必要があるからである. 一般に p 個の連結成分から成るものの総和は $(i\Lambda)^p/p!$ に等しい. したがって，真空偏極の総計は

$$\langle 0|S|0\rangle=\sum_{p=0}^{\infty}(i\Lambda)^p/p!=e^{i\Lambda} \tag{27}$$

である. 上で述べたように Λ は実数であるから，これは相因子であって前節の一般論の結果と一致する.

一般に，真空偏極の Feynman 図を部分として含まないような任意の Feynman 図 G に，あらゆる可能な真空偏極の Feynman 図をつけ加えてできる Feynman 図に対応する行列要素の総和は，G に対応する行列要素の $e^{i\Lambda}$ 倍に等しい. したがって，前節でやったように S を $\langle 0|S|0\rangle$ で割ると，真空偏極の Feynman 図を部分として含むような Feynman 図は全

く考慮しなくてもよいことがわかる．

また真空偏極を含まない非連結な Feynman 図からの寄与の総和も，やはり同様に因数分解される．たとえば，初期状態が粒子系 a' と粒子系 a'' とから成り，終状態が粒子系 b' と粒子系 b'' とから成るとき，a' と b'，a'' と b'' はそれぞれでつながっているが，a' と b''，a'' と b' はつながっていないような Feynman 図からの行列要素の総和は $\langle b'|S|a'\rangle\langle b''|S|a''\rangle$ に等しい．したがって，Feynman 図として今後とくに断らない限り連結な Feynman 図を考えることにする．

4-2 j　自己質量項　前節で注意したように，相互作用表示においては自由場の部分の質量は，はだかの質量でなく物理的質量を使う．それゆえ，その差に相当する部分は相互作用の方にくり入れておかなければならない．質量 μ の中性スカラー場 $\phi(x)$ に対しては，$\mathcal{L}_I(x)$ に

$$\frac{1}{2}\delta\mu^2 :\phi^2(x): \qquad (\delta\mu^2\equiv\mu^2-\mu_0{}^2) \tag{28}$$

質量 m のスピノル場 $\psi(x)$ に対しては，$\mathcal{L}_I(x)$ に

$$\delta m :\bar{\psi}(x)\psi(x): \qquad (\delta m\equiv m-m_0) \tag{29}$$

がつけ加わる．$\delta\mu^2$，δm を ♦自己質量(self-mass)といい，その意義はくりこみ理論において明らかとなる．

Feynman 図では自己質量項は頂点の印 ○ の横に $\delta\mu^2$ または δm を書きそえて表わす．

4-2 k　τ 関数の計算　以上 S 行列の計算について述べたが，τ 関数の計算のときもほとんど同じことで，むしろ原理的にはかえって簡単である．今度の場合は，4-1 の (50) のように T 積の中に $\mathcal{L}_I(x^{(j)})$ を通してのみならず直接にいくつかの場の演算子が入るから，そのような T 積について Wick の定理を適用することになる．このとき必要なのは真空期待値だけだから，正規積の中に場の演算子を 1 つでも含む項は生き残らず，全部が Feynman 伝播関数になっている項だけをとり出せばよい．外部時空座標の関数である場の演算子を含むような Feynman 伝播関数を外線で表わすことにすれば，S 行列の場合と全く同じ Feynman 図が利用できる．ただ違うところは，外線にも Feynman 伝播関数が対応するということと，頂点を全くもたない素通りの線も無視できないことである．

4-3 Feynman 規則

前節において Feynman 図を導入したが，Feynman 図が与えられたときに，それに対応する行列要素を書き下すための処方箋を *Feynman 規則(Feynman rules)という．本節では Feynman 規則について説明する．

4-3 a 運動量表示 実際の計算はすべて運動量表示で行なわれる．Feynman 伝播関数の運動量表示はすでに 2-6 d, f に与えられている．いくつもの Feynman 伝播関数を考えるときは，4 次元運動量の相対的な向きをきちんと決めておくことが必要である．Feynman 伝播関数 $\langle 0|T[\varphi_1(x^{(j)})\varphi_2(x^{(k)})]|0\rangle$ の運動量表示における指数関数が $\exp[-ip_l(x^{(j)}-x^{(k)})]$ となっているときに，Feynman 図の内線 l を流れる 4 次元運動量 p_l の向きを $x^{(k)}$ に対応する頂点 k から $x^{(j)}$ に対応する頂点 j への向きであると定義する．

初期状態は真空 $|0\rangle$ に特定の運動量の生成演算子を，終状態は $\langle 0|$ に消滅演算子を掛けることによって表わせる．(17)に現われる場の演算子の正規積をこれらではさんだものを計算するわけだが，前節で注意したように，正規積内の消滅演算子はちょうど初期状態の粒子を全部消し，生成演算子は終状態の粒子をそっくり生成するような部分だけが生き残るのだから，場の演算子の運動量表示での生成消滅演算子の係数の部分だけがとり出されることになる．すなわち，2-4 d, 2-5 g からわかるように，初期状態については各スカラー粒子に対し

$$(2\pi)^{-3/2}(2\omega_{\boldsymbol{p}})^{-1/2}e^{-ipx} \qquad (p_0=\omega_{\boldsymbol{p}}\equiv\sqrt{\mu^2+\boldsymbol{p}^2}) \tag{1}$$

各スピノル粒子およびその反粒子に対し

$$(2\pi)^{-3/2}\sqrt{m/E_{\boldsymbol{p}}}\,u_s(p)e^{-ipx} \qquad (p_0=E_{\boldsymbol{p}}\equiv\sqrt{m^2+\boldsymbol{p}^2}) \tag{2}$$

$$(2\pi)^{-3/2}\sqrt{m/E_{\boldsymbol{p}}}\,\bar{v}_s(p)e^{-ipx} \qquad (p_0=E_{\boldsymbol{p}}\equiv\sqrt{m^2+\boldsymbol{p}^2}) \tag{3}$$

が寄与することになる．Feynman 図での初期状態の 4 次元運動量 p の向きは内向きと約束すれば，内線の場合の約束とつじつまが合う*．終状態の粒子については，(1)～(3) の共役のものをとればよいから，p の向きは外向きである．

運動量表示で書いてしまうと，$x^{(1)}, \cdots, x^{(n)}$ は指数関数にだけ含まれるから，n 重の 4 次元積分 $\int d^4x^{(1)}\cdots\int d^4x^{(n)}$ は直ちに遂行できる．そ

---

* (3) の場合は p の向きと矢印の向きが逆になる．

の結果各頂点 a_j に

$$(2\pi)^4\delta^4\left(\sum_l \begin{bmatrix} a_j \\ l \end{bmatrix} p_l + p_j\right) \tag{4}$$

のような 4 次元運動量保存則を表わす 4 次元デルタ関数が対応することになる．ただし，$\begin{bmatrix} a_j \\ l \end{bmatrix}$ は *接合指標(incidence number)と呼ばれるもので，内線 l が a_j を端点としないときは 0，端点とするときは a_j から見て p_l が外向きのとき $+1$，内向きのとき -1 であるとして定義される．$p_j \equiv p_{a_j}$ は a_j に入っている外線の 4 次元運動量の代数和(外向きをプラス，内向きをマイナスとする)である．

4-3 b Feynman 規則 Dyson の S 行列の n 次の項を計算するには，まず与えられた $\mathcal{L}_I$ のもとで許される (すなわち $\mathcal{L}_I$ のどれかの項に対応するような頂点のみをもつ) 考えている反応に対応する Feynman 図をことごとく描きあげることから始める (もちろん これは結合常数の次数の低いものから順に考えて，適当な次数で打ち切る)．各 Feynman 図 G に対応する行列要素を書き下すには，今まで考察してきたことをまとめた次の処方箋に従えばよい．質量項はひとまず度外視する．

［規則 1］ 各内線 l の 4 次元運動量 p_l の向きを指定する．矢線に対しては矢印の向きと一致させるのが便利であるが，絶対に一致させることが必要なわけではない．

［規則 2］ 各内線 l に運動量表示の Feynman 伝播関数を用意する．

スカラー粒子： $$\frac{-i}{(2\pi)^4}\cdot\frac{1}{\mu^2-p_l^2-i\varepsilon} \tag{5}$$

スピノル粒子： $$\frac{-i}{(2\pi)^4}\cdot\frac{1}{m-\gamma p_l-i\varepsilon}=\frac{-i}{(2\pi)^4}\cdot\frac{m+\gamma p_l}{m^2-p_l^2-i\varepsilon} \tag{6}$$

(ただし p_l の向きが矢印の向きと逆ならば p_l を $-p_l$ におきかえる．)

光　　子： $$\frac{-i}{(2\pi)^4}\left[\frac{-g_{\mu\nu}}{-p_l^2-i\varepsilon}-(1-\alpha)\frac{(p_l)_\mu(p_l)_\nu}{(-p_l^2-i\varepsilon)^2}\right] \tag{7}$$

ここで γp_l は $\gamma^\mu(p_l)_\mu$ の略である．中性ベクトル粒子については (7) の第 1 項の分母と第 2 項の分母の 1 因子を $m^2-p_l^2-i\varepsilon$ におきかえて $\alpha=0$ とすればよい．なお，計算が進行して分母のゼロ点の上を通る積分をする必要がなくなった時点で $\varepsilon\to+0$ の極限をとるものとする．$\lim_{\varepsilon\to+0}$ はいちいち書かない．

［規則 3］ 各外線に運動量表示の波動関数を用意する．

スカラー粒子：　$\dfrac{1}{(2\pi)^{3/2}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2\omega_p}}$　　$(\omega_p\equiv\sqrt{\mu^2+\boldsymbol{p}^2})$　　(8)

スピノル粒子：　$\dfrac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\dfrac{m}{E_p}}w_s(p)$　　$(E_p\equiv\sqrt{m^2+\boldsymbol{p}^2})$　　(9)

（ただし w_s は初期状態のときは u_s または $\bar{v}_s$，終状態のときは $\bar{u}_s$ または v_s を表わす.）

光　　　子：　$\dfrac{1}{(2\pi)^{3/2}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2|\boldsymbol{p}|}}\epsilon^{(\lambda)}{}_{\mu}$　　(10)

（ただし $\epsilon^{(\lambda)}{}_{\mu}$ はヨコ波光子の偏光方向 $(\lambda=1, 2)$ を表わす．$(\epsilon^{(\lambda)})^2=-1$，$p^{\mu}\epsilon^{(\lambda)}{}_{\mu}=0$ を満足する.）

［規則 4］ スピノル粒子に関係するものを内向きの外線から始めて順次矢印の向きに従って並べる．そのさい各頂点に相当する位置に，$\mathcal{L}_I$ の中の対応する項に含まれているガンマ行列 $(1, \gamma^{\mu}, i\gamma^5\gamma^{\mu}, \gamma^5$ など) をはさむ．ループについても同様に (6) とガンマ行列を順次並べ，各ループごとにトレースをとる．

［規則 5］ 各頂点 a_j に対応して

$$(2\pi)^4 ig_j\delta^4\left(\sum_l\begin{bmatrix}a_j\\l\end{bmatrix}p_l+p_j\right) \tag{11}$$

を用意する．ただし g_j は，頂点 a_j に対応する $\mathcal{L}_I$ の中の項の結合常数を表わすものとする．p_j は頂点 a_j の外線運動量の代数和である．

［規則 6］ 以上を全部掛け合わせて，すべての内線の 4 次元運動量 p_l について積分する．

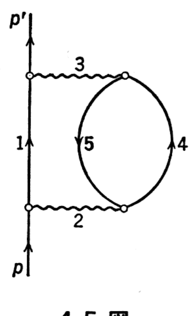
［規則 7］ 統計因子，対称性因子，状態符号因子，ループ符号因子を掛ける．

4-3 c 具体例 量子電磁力学のときは

$$\mathcal{L}_I=e:\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi:A_{\mu} \tag{12}$$

である．したがって，規則 4 でガンマ行列として γ^{μ} のみがでてくる．規則 5 で g_j はすべて e に等しい．ただし，電子を粒子，陽電子を反粒子と約束している．規則 7 で統計因子，対称性因子は不要である．

外線を電子とするとき 4·5 図のような Feynman 図に対応する行列要素は，Feynman 規則に従って次のようになる（4 次元運動量の向きは内線 2 は右向き，内線 3 は左向き，他は矢印の向きにとった).



4·5 図

$$
\begin{aligned}
&(-1)\left[\frac{-i}{(2\pi)^4}\right]^5\left[\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\right]^2[(2\pi)^4 ie]^4\left(\prod_{l=1}^{5}\int d^4p_l\right)\\
&\times\delta^4(p_1+p_2-p)\delta^4(-p_2+p_4-p_5)\delta^4(p_3+p_5-p_4)\delta^4(p'-p_1-p_3)\\
&\times\sqrt{\frac{m}{E_{p'}}}\bar{u}_{s'}(p')\gamma^\rho\frac{1}{m-\gamma p_1-i\varepsilon}\gamma^\mu u_s(p)\sqrt{\frac{m}{E_p}}\\
&\times\mathrm{tr}\left[\gamma^\sigma\frac{1}{m-\gamma p_4-i\varepsilon}\gamma^\nu\frac{1}{m-\gamma p_5-i\varepsilon}\right]\left[\frac{-g_{\mu\nu}}{-p_2{}^2-i\varepsilon}-(1-\alpha)\frac{(p_2)_\mu(p_2)_\nu}{(-p_2{}^2-i\varepsilon)^2}\right]\\
&\times\left[\frac{-g_{\rho\sigma}}{-p_3{}^2-i\varepsilon}-(1-\alpha)\frac{(p_3)_\rho(p_3)_\sigma}{(-p_3{}^2-i\varepsilon)^2}\right] \qquad (13)
\end{aligned}
$$

4 次元デルタ関数に関する積分はすぐに遂行できるから，(13) は $p_2=k$, $p_4=k'$ とおくとき，

$$
\begin{aligned}
&\frac{ie^4}{(2\pi)^4}\delta^4(p'-p)\frac{1}{(2\pi)^3}\cdot\frac{m}{E_p}\int d^4k\int d^4k'\,\bar{u}_{s'}(p')\gamma^\rho\frac{1}{m-\gamma(p-k)-i\varepsilon}\\
&\times\gamma^\mu u_s(p)\,\mathrm{tr}\left[\gamma^\sigma\frac{1}{m-\gamma k'-i\varepsilon}\gamma^\nu\frac{1}{m-\gamma(k'-k)-i\varepsilon}\right]\\
&\times\left[\frac{g_{\mu\nu}}{-k^2-i\varepsilon}+(1-\alpha)\frac{k_\mu k_\nu}{(-k^2-i\varepsilon)^2}\right]\left[\frac{g_{\rho\sigma}}{-k^2-i\varepsilon}+(1-\alpha)\frac{k_\rho k_\sigma}{(-k^2-i\varepsilon)^2}\right] \qquad (14)
\end{aligned}
$$

と簡単化される．4 次元運動量の保存は Feynman 図からもすぐ読みとれるから，最初から (14) の形で書き下すこともできる．

4-3 d 4 次元運動量保存則 上の例でも見られたように，(11) の各頂点ごとの保存則から全体の 4 次元運動量の保存を表わす 4 次元デルタ関数がでてくる．このことを一般的に証明するには，接合指標の性質

$$\sum_j\begin{bmatrix}a_j\\ l\end{bmatrix}=0 \qquad (15)$$

に注意する．ただし，和は Feynman 図 G のすべての頂点についてとるものとする．なぜなら，$\begin{bmatrix}a_j\\ l\end{bmatrix}$ の定義により，それが 0 でないのは a_j が l の端点であるただ 2 つだけであり，それらについては必ず一方が $+1$ 他方が -1 であるからである．(15) を用いると，

$$\sum_j\left(\sum_l\begin{bmatrix}a_j\\ l\end{bmatrix}p_l+p_j\right)=\sum_l\left(\sum_j\begin{bmatrix}a_j\\ l\end{bmatrix}\right)p_l+\sum_j p_j=\sum_j p_j \qquad (16)$$

であるから，(11) の積から必ず $\delta^4(\sum_j p_j)$ がでてくることになる*．したがって，内線の運動量に関係した 4 次元デルタ関数の数は $n-1$ になる**．

* このことはすでに 4-1 の (34) で用いた．

** もし G が連結と限らず p 個の連結成分から成るときは，$n-p$ となる．

G の内線の総数を N とすると，もともとの4次元運動量積分の数は N であるが，これらの4次元デルタ関数の数だけは直ちに積分が遂行できるので，実際上計算しなければならないのは

$$\kappa \equiv N-n+1 \tag{17}$$

個の4次元積分である．この κ を G の ♦連結度(connectivity)という．N 個の p_l のうちから変数として一次独立な κ 個 $k_1, \cdots, k_\kappa$ を選ぶと，他はこれらと外線運動量の一次結合で書き表わされる．$\{k_1, \cdots, k_\kappa\}$ を ♦基底運動量(basic momenta)という．もちろん基底運動量の選び方は一般にたくさんある．(14)の $\{k, k'\}$ は4·5図の1つの基底運動量である．

4-3 e 微分結合のある場合 以上では直接結合の場合だけを扱ってきたが，Feynman 規則は微分結合のある場合にもすぐに拡張できる．途中の考察を省略して結果のみを述べると，$\mathcal{L}_I(x)$ の各項の含む時間微分の個数が $\mathcal{L}_0(x)$ の時間微分項のそれより少ない場合には*，次の例でも見られるように，機械的な拡張で正しい結果が得られる．$\mathcal{L}_I(x)$ の中に時間微分の個数が $\mathcal{L}_0(x)$ の時間微分項のそれと等しいものがあるときは，$\mathcal{L}_0(x)$ と $\mathcal{L}_I(x)$ の分割は人為的なわけで，質的な変更を生ずる．この場合には，$\mathcal{L}_I(x)$ に特異な項をつけ加えなければならない．

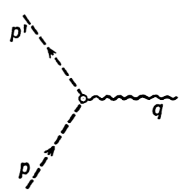
さて，微分演算子が1個の場合の例として，3-4 の(21)から得られる荷電スカラー場と電磁場との相互作用

$$\mathcal{L}_I = e:i(\phi^\dagger\partial^\mu\phi-\partial^\mu\phi^\dagger\cdot\phi):A_\mu+2e^2:\frac{1}{2}\phi^\dagger\phi A^\mu A_\mu: \tag{18}$$

を考えよう．第2項は Feynman 図では2つの光子の線が同じ頂点に入ることになるので ♦接触項(contact term)と呼ばれるが，結合常数 e についてそれ自身ですでに2次であって，(11)の g_j として $2e^2$ を使う必要がある．第1項が微分結合の例で，対応する Feynman 図での頂点に入る線の4次元運動量の向きを4·6図のように矢印の向きと一致させたとき，(11)に相当する因子として

$$(2\pi)^4 ie(p^\mu+p'^\mu)\delta^4(p'-p-q) \tag{19}$$

を用いればよい．ただし，q_μ の向きは内向きにとった．

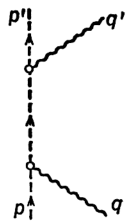


4·6 図

* Proca 場の U_0 は，3-6 の(7), (6)から見られる通り1個の時間微分を含むものとみなす．

たとえば，4·7 図に対応する行列要素は次の式で与えられる．

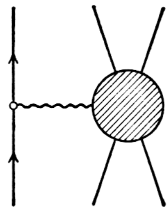
$$\frac{ie^2}{(2\pi)^2}\cdot\frac{\delta^4(p'+q'-p-q)}{(2\omega_p\cdot 2\omega_{p'}\cdot 2|\boldsymbol{q}|\cdot 2|\boldsymbol{q}'|)^{1/2}}$$
$$\times\frac{\epsilon^{(\lambda')}{}_\nu(2p'^\nu+q^\nu)(2p^\mu+q^\mu)\epsilon^{(\lambda)}{}_\mu}{\mu^2-(p+q)^2-i\varepsilon} \qquad (20)$$



4·7 図

4-3 f　S 行列のゲージ不変性　S 行列は電磁場のゲージには依存しない．つまり一般に光子の伝播関数でゲージに依存する項は，S 行列要素には全くきかない．

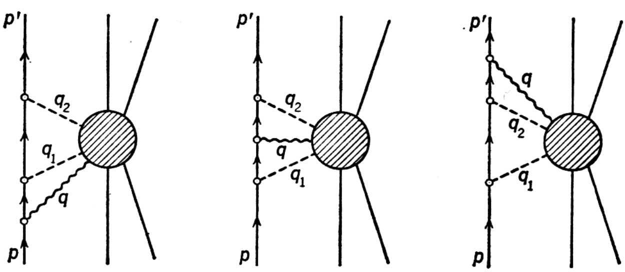
たとえば，4·8 図のようなものを考えよう．右側の部分はどんな図であってもよいという意味である．左側の部分は，係数を除き $\bar{u}_{s'}(p')\gamma^\mu u_s(p)$ であるから，これに光子の運動量 $p_\mu'-p_\mu$ を掛けると Dirac 方程式 2-5 の (31) により


4·8 図

$$\bar{u}_{s'}(p')\gamma^\mu(p_\mu'-p_\mu)u_s(p)=\bar{u}_{s'}(p')(m-\gamma p)u_s(p)$$
$$-\bar{u}_{s'}(p')(m-\gamma p')u_s(p)=0 \qquad (21)$$

となる．つまり光子の伝播関数のゲージ項の寄与はない．

もっと一般の場合は，単独の Feynman 図では成立しないが，1つの元になる Feynman 図を考え，それに単位電荷の流れに沿って各荷電粒子の外線内線に光子の入る頂点を1つ挿入してできる一連の Feynman 図*(たとえば 4·9 図の 3 つの Feynman 図）を足し合わせると，ゲージ項の寄与は消失する．このことは次のようにして示される．元の Feynman 図の内



4·9 図

* 荷電スカラー粒子と光子の頂点では，その頂点にさらに光子の線をつけ加えて接触項の頂点となる場合も考慮しなければならない．

線のところに光子が入る場合，ゲージ項の寄与は恒等式

$$\frac{1}{m-\gamma p'-i\varepsilon}\gamma^{\mu}(p_{\mu}'-p_{\mu})\frac{1}{m-\gamma p-i\varepsilon}=\frac{1}{m-\gamma p'-i\varepsilon}-\frac{1}{m-\gamma p-i\varepsilon} \quad (22)$$

$$\frac{(p'^{\mu}+p^{\mu})(p_{\mu}'-p_{\mu})}{(\mu^2-p'^2-i\varepsilon)(\mu^2-p^2-i\varepsilon)}=\frac{1}{\mu^2-p'^2-i\varepsilon}-\frac{1}{\mu^2-p^2-i\varepsilon} \quad (23)$$

を用いて2つの部分に分けると，上に考えた一連の Feynman 図の寄与の和をとれば順次相殺されて，外線の部分のみが残り，それは Dirac 方程式あるいは $p^2=\mu^2$ を使うとおちる.

たとえば4･9図について主要な部分は，

$$\begin{aligned}M\equiv&\bar{u}(p')\Gamma'\frac{1}{m-\gamma(p+q+q_1)-i\varepsilon}\Gamma\frac{1}{m-\gamma(p+q)-i\varepsilon}\gamma q u(p)\\&+\bar{u}(p')\Gamma'\frac{1}{m-\gamma(p+q_1+q)-i\varepsilon}\gamma q\frac{1}{m-\gamma(p+q_1)-i\varepsilon}\Gamma u(p)\\&+\bar{u}(p')\gamma q\frac{1}{m-\gamma(p+q_1+q_2)-i\varepsilon}\Gamma'\frac{1}{m-\gamma(p+q_1)-i\varepsilon}\Gamma u(p)\end{aligned} \quad (24)$$

である．ただし，$p'=p+q_1+q_2+q$ で，Γ, Γ' は任意のガンマ行列とする．$u(p)$, $\bar{u}(p')$ のスピン添字は省略した. (22) と Dirac 方程式を用いると，(24) は

$$\begin{aligned}M=&\bar{u}(p')\Gamma'\frac{-1}{m-\gamma(p+q+q_1)-i\varepsilon}\Gamma u(p)\\&+\bar{u}(p')\Gamma'\left[\frac{1}{m-\gamma(p+q_1+q)-i\varepsilon}-\frac{1}{m-\gamma(p+q_1)-i\varepsilon}\right]\Gamma u(p)\\&+\bar{u}(p')\Gamma'\frac{1}{m-\gamma(p+q_1)-i\varepsilon}\Gamma u(p)\\=&0\end{aligned} \quad (25)$$

となる.

このことは一般的に成立する．また荷電粒子の内線がループ状になっている場合にも (22), (23) を用いてゲージ項のきかないことを証明することができる．今度の場合，最後に残る項は積分変数の運動量の変数変換を行なうと*，相殺することがいえる (4-5 参照)**.

以上のようにして S 行列は一般にゲージ不変であることがいえるので，ゲージ・パラメーター α に依存しない．もちろん τ 関数は α に依存する.

---

* 積分が収束しない場合はこの変数変換は必ずしも許されない．むしろこの変数変換が許されるように積分を定義する (6-3 参照).

** この相殺の形式的証明は，荷電スカラー場の場合接触項で正規積をとるとうまくいかない．この矛盾はくりこみによって消失する.

4-3 g　ループの運動量依存性　量子電磁力学ではゲージ不変性のために，ループで表わされる部分に関して次の定理が成りたつ．

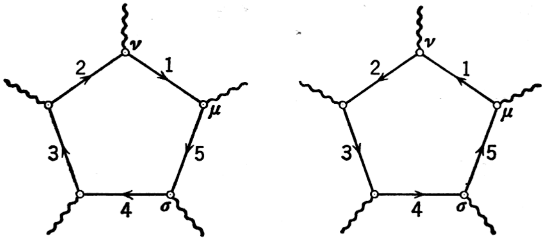
［定理］ Feynman 図の中で r 個の光子の線ばかりで囲まれたループに対応する式のゲージ不変な和 $M_{\mu\nu\cdots\sigma}$ は，光子の 4 次元運動量 p_j ($j=1, 2, \cdots, r$) についてベキ級数に展開するとき*，その最低次の項は少なくとも r 次である．

証明の概略は次の通りである．$M_{\mu\nu\cdots\sigma}$ の $p_1, \cdots, p_r$ に関する最低次の項のうち，スカラー積の形になっていない p_j を最もたくさん含んでいる項(の 1 つ)に着目する．もしこの項が $r-1$ 次またはそれ以下ならば，テンソル添字の不足を補うため少なくとも 1 つの $g_{\rho\tau}$ を含んでいなければならない．ところがゲージ不変性により，$M_{\mu\nu\cdots\sigma}$ はテンソル添字 ρ に対応する光子の 4 次元運動量 p^ρ を掛けたときに 0 になるはずである．しかし，着目した項に p^ρ を掛けたものを相殺する項は他の項からは生じ得ないから矛盾である．したがってこの項は少なくとも r 次でなくてはならない．
(証明終)

4-3 h　奇数次ループ　量子電磁力学ではまた，荷電共役不変性から次の †Furry (ファーリィ) の定理が成立する．

［Furry の定理］ 頂点のガンマ行列が全部 γ_μ のときは，奇数個の頂点をもつループを含む Feynman 図からの寄与は 0 である．

正しくいえば矢印に関して逆まわりのループをもつ Feynman 図からの寄与と必ず相殺するという意味であって，単独の Feynman 図で 0 になるというのではない．



4・10 図

証明は極めて簡単である．4・10 図の例に示されるように，ループで矢印が時計まわりのものと反時計まわりのものとがあるから，

---

* ループの内線がすべて 0 でない質量をもつので展開可能である (5-2 参照)．

$$F_1 \equiv \mathrm{tr}\left[\gamma^\mu \frac{1}{m-\gamma p_1-i\varepsilon}\gamma^\nu \cdots \gamma^\sigma \frac{1}{m-\gamma p_{2k+1}-i\varepsilon}\right] \tag{26}$$

$$F_2 \equiv \mathrm{tr}\left[\frac{1}{m+\gamma p_{2k+1}-i\varepsilon}\gamma^\sigma \cdots \gamma^\nu \frac{1}{m+\gamma p_1-i\varepsilon}\gamma^\mu\right] \tag{27}$$

の和を考える必要がある．(27)では運動量の向きと矢印の向きが逆になっている．さて，(26)で，トレースの性質 2-5 の (50) を用いて荷電共役の行列 C^{-1} と C をそれぞれトレース内の左端と右端に挿入し，次に C を 3-4 の (29) を用いて左端にまでもっていくと，

$$F_1 = (-1)^{2k+1}\mathrm{tr}\left[(\gamma^\mu)^T \frac{1}{m+\gamma^T p_1-i\varepsilon}(\gamma^\nu)^T \cdots (\gamma^\sigma)^T \frac{1}{m+\gamma^T p_{2k+1}-i\varepsilon}\right]$$
$$= -F_2 \tag{28}$$

となる．ただし，転置行列のトレースはもとの行列のトレースに等しいことを用いた．(証明終)

4-4　最低次の摂動計算例

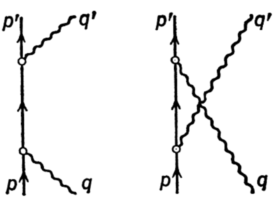
摂動計算は前節で述べた Feynman 規則に従って行なえばよい．強い相互作用に対しては摂動計算はよい近似を与えない．弱い相互作用については通常の理論では摂動論は最低次にしか適用できない．結局摂動論が具体的な計算法として最も有効に駆使されるのは量子電磁力学においてである．

本節では，具体的な摂動計算の例として，量子電磁力学に現われる基本的なプロセスの微分断面積を摂動の最低次で計算する．

4-4 a　電子光子散乱　電子と光子の弾性散乱

$$e+\gamma \longrightarrow e+\gamma \tag{1}$$

は通常 *Compton (コンプトン) 散乱と呼ばれている．最低次は e^2 のオーダーで，Feynman 図は 4·11 図に示す 2 つがある．この 2 つの図は 4-2 e で説明したように交差対称性によって結びついているものである．



4·11 図

S 行列要素は 2 次のオーダーで

$$S^{(2)}_{e\gamma\to e\gamma} = (2\pi)^4 ie^2 \cdot \delta^4(p'+q'-p-q)(2\pi)^{-6}m(4E_pE_{p'}|\boldsymbol{q}||\boldsymbol{q}'|)^{-1/2}(M_1+M_2) \tag{2}$$

である．ただし

$$M_1 \equiv \bar{u}_{s'}(p')\gamma^\nu \epsilon_\nu' \frac{m+\gamma(p+q)}{m^2-(p+q)^2-i\varepsilon}\gamma^\mu \epsilon_\mu u_s(p) \tag{3}$$

$$M_2 \equiv \bar{u}_{s'}(p')\gamma^\mu \epsilon_\mu \frac{m+\gamma(p-q')}{m^2-(p-q')^2-i\varepsilon}\gamma^\nu \epsilon_\nu' u_s(p) \tag{4}$$

とする．ここに ϵ_μ, ϵ_ν' はそれぞれ $\epsilon^{(\lambda)}{}_\mu$, $\epsilon^{(\lambda')}{}_\nu$ の略記である．また次の式が成りたつ．

$$(m-\gamma p)u_s(p)=0, \qquad \bar{u}_{s'}(p')(m-\gamma p')=0 \tag{5}$$

$$p^2=p'^2=m^2, \qquad q^2=q'^2=0 \tag{6}$$

$$q^\mu \epsilon_\mu = q'^\mu \epsilon_\mu' = 0 \tag{7}$$

$$\epsilon^2=\epsilon'^2=-1 \tag{8}$$

計算を簡単にするために，初期状態の電子の静止系 $p_0=m$, $\boldsymbol{p}=0$ で考える．さらに $\epsilon_0=\epsilon_0'=0$ ととってよいから

$$p^\mu \epsilon_\mu = p^\mu \epsilon_\mu' = 0 \tag{9}$$

となる．それゆえガンマ行列の反交換関係 2-5 の (4) に $p_\mu \epsilon_\nu$ を掛けるとおつりの項がおちて，γp と $\gamma\epsilon$ が反可換であることがわかる．同様に，γp と $\gamma\epsilon'$, γq と $\gamma\epsilon$, $\gamma q'$ と $\gamma\epsilon'$ はそれぞれ反可換である．このことを使って $\gamma\epsilon$ と $m+\gamma(p+q)$ の順序をいれかえて，(5), (6) を用いると，(3) は

$$M_1 = \bar{u}_{s'}(p')(\gamma\epsilon')(\gamma\epsilon)(\gamma q)(2pq)^{-1}u_s(p) \tag{10}$$

となる．ただし分母は 0 とならないので $\varepsilon \to +0$ の極限をとった．同様に

$$M_2 = \bar{u}_{s'}(p')(\gamma\epsilon)(\gamma\epsilon')(\gamma q')(2pq')^{-1}u_s(p) \tag{11}$$

さて，遷移確率を計算するには $|M_1+M_2|^2$ を勘定しなければならないが，このさいもし終状態の電子のスピンの向きを観測せず，また初期状態の電子はスピン偏極していないものとすれば，s' については足し合わせ，s については相加平均をとればよいことになる．2-5 の (35) を用いると，

$$\begin{aligned} K &\equiv \frac{1}{2}\sum_{s,s'}|M_1+M_2|^2 \\ &= (8m^2)^{-1}\,\mathrm{tr}\{(m+\gamma p')[(\gamma\epsilon')(\gamma\epsilon)(\gamma q)(2pq)^{-1}+(\gamma\epsilon)(\gamma\epsilon')(\gamma q')(2pq')^{-1}] \\ &\quad \times (m+\gamma p)[(2pq)^{-1}(\gamma q)(\gamma\epsilon)(\gamma\epsilon')+(2pq')^{-1}(\gamma q')(\gamma\epsilon')(\gamma\epsilon)]\} \end{aligned} \tag{12}$$

となる．このトレースの計算はいささか面倒であるが，次のようにやればよい．まず

$$\begin{aligned} &(\gamma\epsilon')(\gamma\epsilon)(\gamma q)(2pq)^{-1}+(\gamma\epsilon)(\gamma\epsilon')(\gamma q')(2pq')^{-1} \\ &\quad = (\gamma\epsilon)(\gamma\epsilon')(\gamma k)+(\epsilon\epsilon')(\gamma q)(pq)^{-1} \end{aligned} \tag{13}$$

と書き直す．ここに

$$k \equiv (2pq')^{-1}q' - (2pq)^{-1}q \tag{14}$$

は

$$pk=0 \tag{15}$$

を満足するから，γp と γk とは反可換である．(13) を (12) に代入して，(7), (9), (15) から従う反可換性と，トレースの性質 2-5 の (57) を用いると，

$$\begin{aligned}8m^2K=&\mathrm{tr}[(m+\gamma p')(\gamma\epsilon)(\gamma\epsilon')(\gamma k)(\gamma k)(\gamma\epsilon')(\gamma\epsilon)(m-\gamma p)]\\&+2(\epsilon\epsilon')(pq)^{-1}\mathrm{tr}[(m+\gamma p')(m-\gamma p)(\gamma\epsilon)(\gamma\epsilon')(\gamma k)(\gamma q)]\\&+(\epsilon\epsilon')^2(pq)^{-2}\mathrm{tr}[(m+\gamma p')(\gamma q)(m+\gamma p)(\gamma q)]\end{aligned} \tag{16}$$

となる．第1項と第3項は直ちに計算できる．第2項は (2) のデルタ関数からでてくる保存則 $p'=p+q-q'$ と (6) を用いると簡単になる．

$$\begin{aligned}K&=(2m^2)^{-1}[k^2(m^2-pp')+2(\epsilon\epsilon')^2(qq')(pq)^{-1}+2(\epsilon\epsilon')^2(p'q)(pq)^{-1}]\\&=\frac{1}{4m^2}\left[\frac{(pq-pq')^2}{(pq)(pq')}+4(\epsilon\epsilon')^2\right]\end{aligned} \tag{17}$$

ところで $\boldsymbol{p}=0$ であったから，(17) は

$$K=\frac{1}{4m^2}\left[\frac{(|\boldsymbol{q}|-|\boldsymbol{q}'|)^2}{|\boldsymbol{q}||\boldsymbol{q}'|}+4(\epsilon\epsilon')^2\right] \tag{18}$$

とも書ける．

遷移確率は，4-1 の (38) により

$$w_{e\gamma\to e\gamma}=(2\pi)^4\delta^4(p'+q'-p-q)\frac{e^4}{(2\pi)^{12}}\cdot\frac{mK}{4E_{\boldsymbol{p}'}|\boldsymbol{q}||\boldsymbol{q}'|} \tag{19}$$

である．したがって，4-1 f で定義した微分断面積は，$v=1$, $\rho_1=\rho_2=(2\pi)^{-3}$ を代入すると*,

$$\frac{d\sigma_{e\gamma\to e\gamma}}{d\Omega}=\left(\frac{e^2}{4\pi}\right)^2\int_0^\infty|\boldsymbol{q}'|^2d|\boldsymbol{q}'|\int d^3p'\delta^4(p'+q'-p-q)\frac{mK}{E_{\boldsymbol{p}'}|\boldsymbol{q}||\boldsymbol{q}'|} \tag{20}$$

となる．ただし $d\Omega$ は微小立体角である．

(20) の $\boldsymbol{p}'$ 積分はすぐにできるが，$|\boldsymbol{q}'|$ の積分は注意を要する．運動量の保存則から

$$E_{\boldsymbol{p}'}=(m^2+|\boldsymbol{q}|^2+|\boldsymbol{q}'|^2-2|\boldsymbol{q}||\boldsymbol{q}'|\cos\theta)^{1/2} \tag{21}$$

である．ここで散乱角 ($\boldsymbol{q}$ と $\boldsymbol{q}'$ のなす角) θ は固定して考えている．エネルギー保存則 $E_{\boldsymbol{p}'}=m+|\boldsymbol{q}|-|\boldsymbol{q}'|$ と (21) から $|\boldsymbol{q}'|$ を解くと，

$$|\boldsymbol{q}'|=\frac{m|\boldsymbol{q}|}{m+(1-\cos\theta)|\boldsymbol{q}|} \tag{22}$$

---

* ρ_j は空間の体積 V を有限にした場合との対応 $1/V\sim(2\pi)^{-3}d^3p$ から従う．

という，いわゆる Compton の式が得られる．さて，(20) の $|\boldsymbol{q}'|$ 積分であるが，$\delta(E_{p'}+|\boldsymbol{q}'|-m-|\boldsymbol{q}|)$ を $|\boldsymbol{q}'|$ について積分するには $(dE_{p'}/d|\boldsymbol{q}'|+1)^{-1}$ を計算しなければならない．この量は，(21) から得られる式にエネルギー保存則を適用し，さらに (22) を逆向きに使うと，$|\boldsymbol{q}'|E_{p'}/|\boldsymbol{q}|m$ に等しいことがいえる．

結局 (20) は

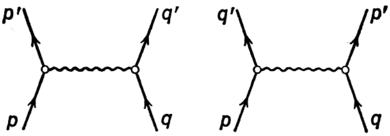
$$d\sigma_{e\gamma\to e\gamma}/d\Omega=(e^2/4\pi)^2(|\boldsymbol{q}'|/|\boldsymbol{q}|)^2K \tag{23}$$

となる．ただし，K は(18)で，$|\boldsymbol{q}'|$ は(22)で与えられる．(23) は ♦Klein-Nishina (仁科) の公式と呼ばれている．

4-4 b 電子電子散乱 電子と電子の弾性散乱

$$e+e \longrightarrow e+e \tag{24}$$

は ♦Møller (メラー) 散乱ともいわれる．最低次の Feynman 図は 4·12 図に示す 2 つがある．



4·12 図

$$S^{(2)}_{ee\to ee}=(2\pi)^4ie^2\cdot\delta^4(p'+q'-p-q)(2\pi)^{-6}m^2(E_pE_qE_{p'}E_{q'})^{-1/2}$$
$$\times\Big\{\bar{u}_{s'}(p')\gamma^\mu u_s(p)\cdot\bar{u}_{t'}(q')\gamma^\nu u_t(q)\frac{-g_{\mu\nu}}{-(p'-p)^2}$$
$$-\bar{u}_{t'}(q')\gamma^\mu u_s(p)\cdot\bar{u}_{s'}(p')\gamma^\nu u_t(q)\frac{-g_{\mu\nu}}{-(q'-p)^2}\Big\} \tag{25}$$

である．ただし光子の伝播関数は Feynman ゲージを用いた．第 2 項のマイナスは状態符号因子による．

(25) から遷移確率は，終状態のスピンについて足し合わせ，初期状態のスピンについて平均すると，

$$w_{ee\to ee}=(2\pi)^4\delta^4(p'+q'-p-q)\frac{e^4}{(2\pi)^{12}}\cdot\frac{m^4}{E_pE_qE_{p'}E_{q'}}\cdot\frac{L}{4} \tag{26}$$

である．ただし

$$(2m)^4L$$
$$\equiv[(p'-p)^2]^{-2}\mathrm{tr}[(m+\gamma p')\gamma^\mu(m+\gamma p)\gamma^\nu]\mathrm{tr}[(m+\gamma q')\gamma_\mu(m+\gamma q)\gamma_\nu]$$
$$+[(q'-p)^2]^{-2}\mathrm{tr}[(m+\gamma q')\gamma^\mu(m+\gamma p)\gamma^\nu]\mathrm{tr}[(m+\gamma p')\gamma_\mu(m+\gamma q)\gamma_\nu]$$
$$-2[(p'-p)^2(q'-p)^2]^{-1}$$
$$\times\mathrm{tr}[(m+\gamma p')\gamma^\mu(m+\gamma p)\gamma_\nu(m+\gamma q')\gamma_\mu(m+\gamma q)\gamma^\nu] \tag{27}$$

第 1 項は 2-5 の (55), (56) を使って直ちに

$$32[(p'-p)^2]^{-2}[2m^4-m^2(pp'+qq')+(pq)(p'q')+(pq')(p'q)] \tag{28}$$

となることがわかる．第2項はこの式で p' と q' とをいれかえればよい．第3項のトレースは，すぐ証明できる公式

$$\gamma^{\mu}\gamma^{\rho}\gamma_{\mu}=-2\gamma^{\rho} \tag{29}$$

$$\gamma^{\mu}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}\gamma_{\mu}=4g^{\rho\sigma} \tag{30}$$

$$\gamma^{\mu}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}\gamma^{\tau}\gamma_{\mu}=-2\gamma^{\tau}\gamma^{\sigma}\gamma^{\rho} \tag{31}$$

を用いて計算すればよい．結果は

$$-32[(p'-p)^2(q'-p)^2]^{-1}$$
$$\times[-2m^4+m^2(pp'+qq'+pq'+p'q+pq+p'q')-2(pq)(p'q')] \tag{32}$$

さて，保存則 $p'+q'=p+q$ と，$p^2=q^2=p'^2=q'^2=m^2$ とから

$$qq'=pp',\qquad p'q=pq' \tag{33}$$

$$p'q'=pq=pp'+pq'-m^2 \tag{34}$$

であるから，pp' と pq' で書き表わせる．あるいは

$$\lambda_1\equiv-(p'-p)^2/2m^2=-1+pp'/m^2 \tag{35}$$

$$\lambda_2\equiv-(q'-p)^2/2m^2=-1+pq'/m^2 \tag{36}$$

$$\gamma\equiv pq/m^2=\lambda_1+\lambda_2+1 \tag{37}$$

を用いて表わすと，

$$L=m^{-4}\lambda_1{}^{-2}\lambda_2{}^{-2}[\gamma^2(\lambda_1{}^2+\lambda_2{}^2)-\lambda_1\lambda_2(2\gamma-1-\lambda_1\lambda_2)] \tag{38}$$

となる．

初期状態の2電子の相対的な速さ v は，$\boldsymbol{p}=0$ の系では

$$v=|\boldsymbol{q}|/E_q=\sqrt{m^2E_q{}^2-m^4}/mE_q \tag{39}$$

であるから，vE_pE_q が Lorentz 不変になるように

$$v=\sqrt{(pq)^2-m^4}/E_pE_q=m^2\sqrt{\gamma^2-1}/E_pE_q \tag{40}$$

によって定義する．したがって，微分断面積は（$\rho_1=\rho_2=(2\pi)^{-3}$ を使って）

$$d\sigma_{ee\to ee}/d\lambda_1=(e^2/4\pi)^2m^2IL/\sqrt{\gamma^2-1} \tag{41}$$

となる．ただし

$$I\equiv4\int d^4p'\int d^4q'\theta(p_0')\delta(p'^2-m^2)\theta(q_0')\delta(q'^2-m^2)$$
$$\times\delta^4(p'+q'-p-q)\delta(\lambda_1+1-pp'/m^2) \tag{42}$$

とおいた．この式では 2-6 の (7) を利用して3次元積分を4次元積分に直してある．$\boldsymbol{p}=0$ の系では (42) はあまり面倒なく計算できる．結果は

$$I=2\pi m|\boldsymbol{q}|^{-1}\theta(\lambda_1)\theta((E_q/m)-1-\lambda_1) \tag{43}$$

となるから，一般の系では (37) により

$$I=(2\pi/\sqrt{\gamma^2-1})\theta(\lambda_1)\theta(\lambda_2) \tag{44}$$

である．したがって，$\lambda_1>0$，$\lambda_2>0$ に対し

$$\frac{d\sigma_{ee\to ee}}{d\lambda_1}=\left(\frac{e^2}{4\pi}\right)^2\cdot\frac{2\pi[\gamma^2(\lambda_1{}^2+\lambda_2{}^2)-\lambda_1\lambda_2(2\gamma-1-\lambda_1\lambda_2)]}{m^2(\gamma^2-1)\lambda_1{}^2\lambda_2{}^2} \tag{45}$$

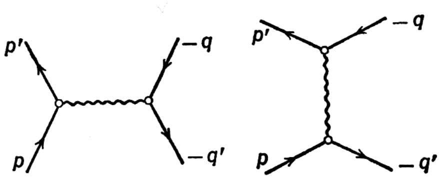
となる．

(45) は $\lambda_j\to 0$ で発散する．これは Coulomb 力が粒子間距離が無限大になっても無視できないためである．

4-4 c 電子陽電子散乱 電子と陽電子の弾性散乱

$$e+\bar{e}\longrightarrow e+\bar{e} \tag{46}$$

は，♦Bhabha (バーバ) 散乱とも呼ばれる．これは Mϕller 散乱の交差対称の場合にあたる．陽電子については，その 4 次元運動量 $-q'$, $-q$ の向きは矢印の向きと逆になっている (つまり矢印の向きに q', q).



4・13 図

$$S^{(2)}_{e\bar{e}\to e\bar{e}}=(2\pi)^4ie^2\cdot\delta^4(p'-q-p+q')(2\pi)^{-6}m^2(E_pE_{q'}E_{p'}E_q)^{-1/2}$$
$$\times\{\bar{u}_{s'}(p')\gamma^\mu u_s(p)\cdot\bar{v}_{t'}(-q')\gamma^\nu v_t(-q)(-g_{\mu\nu})[-(p'-p)^2]^{-1}$$
$$-\bar{v}_{t'}(-q')\gamma^\mu u_s(p)\cdot\bar{u}_{s'}(p')\gamma^\nu v_t(-q)(-g_{\mu\nu})[-(p-q')^2]^{-1}\} \tag{47}$$

であるから，$w_{e\bar{e}\to e\bar{e}}$ の式は形式的に $w_{ee\to ee}$ の式と全く一致することがわかる．ただし，Mϕller 散乱のときは $(p-q')^2\leqq 0$ であったが，今度の場合は $(p-q')^2\geqq 4m^2$ である．

初期状態の 2 粒子の相対的な速さは，

$$v=\sqrt{(pq')^2-m^4}/E_pE_{q'}=m^2\sqrt{(-\lambda_2)(-\lambda_2-2)}/E_pE_{q'} \tag{48}$$

となり，(42) に相当する積分は

$$I'\equiv 4\int d^4p'\int d^4q'\theta(p_0')\delta(p'^2-m^2)\theta(-q_0)\delta(q^2-m^2)$$
$$\times\delta^4(p'-q-p+q')\delta(\lambda_1+1-pp'/m^2) \tag{49}$$

である．$\boldsymbol{p}=0$ の系で計算すれば全く前と同様にして (43) の $|\boldsymbol{q}|$, E_q をそれぞれ $|\boldsymbol{q}'|$, $E_{q'}$ におきかえた式が得られる．したがって

$$I'=[2\pi/\sqrt{(-\lambda_2)(-\lambda_2-2)}]\theta(\lambda_1)\theta(-\lambda_2-\lambda_1-2) \tag{50}$$

を得る．$\lambda_2'\equiv-\lambda_2$ と書くと，$\lambda_1>0$, $\lambda_2'\geqq 2+\lambda_1$ に対し

$$\frac{d\sigma_{e\bar{e}\to e\bar{e}}}{d\lambda_1}=\left(\frac{e^2}{4\pi}\right)^2\cdot\frac{2\pi[\gamma^2(\lambda_1{}^2+\lambda_2'^2)+\lambda_1\lambda_2'(2\gamma-1+\lambda_1\lambda_2')]}{m^2\lambda_1{}^2\lambda_2'^3(\lambda_2'-2)} \tag{51}$$

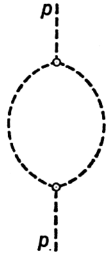
となる.

4-5 簡単な Feynman 積分

Feynman 規則に従えば，S 行列要素は Feynman 図の外線に相当するところは，初期状態あるいは終状態の粒子の波動関数がくる．これは共変な形をしていない．τ 関数の場合は，外線に相当するところも Feynman の伝播関数がくる．いずれの場合も内線に相当する部分は，S 行列では外線運動量の値に制限があるにしても，両者で共通でありかつ明白に共変な形をしている．また高次の補正* を考えるときはこの部分は複雑になっていくが，同じ反応を考えている限り外線の部分は変わらない．それゆえ，外線に対応する部分と内線に対応する部分とはそれぞれ別にして考察する方が便利である.

内線に対応する部分は，4-3 d で述べたように，運動量表示では N 個の Feynman 伝播関数の積の κ 重の 4 次元運動量積分であって，♦Feynman 積分(Feynman integral)と呼ばれている．一般の Feynman 積分については次章で詳しく論ずる．本節ではごく基本的な Feynman 積分を考察する.

4-5 a スカラー粒子の自己エネルギー 素粒子が自分自身と相互作用する効果は，古典力学や量子力学の場合と異なり，場の量子論では無視しえない現実的効果をもたらす．単独でいる素粒子が，量子化された場からうける影響を ♦自己エネルギー (self-energy) という．自己エネルギーは外線が 2本の Feynman 図で表わされる.



4·14 図

自己エネルギーの一番簡単な例は，4·14 図に示すようなスカラー粒子の 2 次の自己エネルギーである．外線の 4 次元運動量を p_μ, 内線の粒子の質量を μ_1, μ_2 とすると，4·14 図に相当する Feynman 積分は**

$$F(p^2)\equiv\frac{1}{(2\pi)^4 i}\int d^4k\frac{1}{\mu_1{}^2-(p-k)^2-i\varepsilon}\cdot\frac{1}{\mu_2{}^2-k^2-i\varepsilon} \qquad (1)$$

である．ただし，結合常数は省略した．(1) で p^2 は必ずしも外線粒子の

* ♦補正 (radiative correction) とは，考えている反応の最低次以外の寄与の総称である.

** $(2\pi)^4 i$ で割ってあるのは 4-1 の (34) の T 行列の定義に合わせるためである.

質量の 2 乗 μ^2 に等しいとは考えない．これを ♦off mass shell, $p^2=\mu^2$ とおくことを ♦on mass shell ということがある．

(1)のような積分を遂行するには，通常 ♦Feynman の恒等式（Feynman identity）

$$\frac{1}{AB}=\int_0^1 \frac{d\alpha}{[\alpha A+(1-\alpha)B]^2} \tag{2}$$

を用いて分母を 1 つにまとめる．(2) が成りたつことは，右辺の積分を実際に遂行してみればすぐ確かめられる．補助変数 α を ♦Feynman パラメーターと呼ぶ*．(2) を用いると

$$F(p^2)=\frac{1}{(2\pi)^4 i}\int_0^1 d\alpha \int d^4k \frac{1}{[\Phi(k,\ p)-i\varepsilon]^2} \tag{3}$$

となる．ただし

$$\begin{aligned}\Phi(k,\ p)&\equiv\alpha[\mu_1{}^2-(p-k)^2]+(1-\alpha)(\mu_2{}^2-k^2)\\ &=\alpha\mu_1{}^2+(1-\alpha)\mu_2{}^2-\alpha(1-\alpha)p^2-(k-\alpha p)^2\end{aligned} \tag{4}$$

とおいた．$k'=k-\alpha p$ と変数変換すれば，

$$F(p^2)=\frac{1}{(2\pi)^4 i}\int_0^1 d\alpha \int d^4k' \frac{1}{[V(p^2,\ \alpha)-k'^2-i\varepsilon]^2} \tag{5}$$

である．ただし

$$V(p^2,\ \alpha)\equiv\alpha\mu_1{}^2+(1-\alpha)\mu_2{}^2-\alpha(1-\alpha)p^2 \tag{6}$$

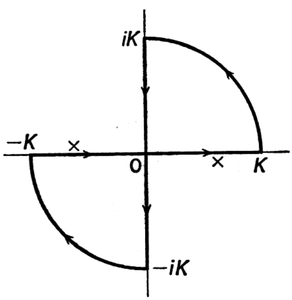
ところで，(5) の積分は不幸にして k_μ' の大きいところからの寄与が対数的に発散する．これは自己エネルギーの計算ではいつでも起こることである．それゆえ，$F(p^2)$ 自身の代りに dF/dp^2 を考えよう．

$$\frac{d}{dp^2}F(p^2)=\frac{2}{(2\pi)^4 i}\int_0^1 d\alpha \int d^4k' \frac{\alpha(1-\alpha)}{[V(p^2,\ \alpha)-k'^2-i\varepsilon]^3} \tag{7}$$

被積分関数を k_0' の複素関数とみるとき，その極の位置は

$$k_0'=\pm\sqrt{V(p^2,\ \alpha)+\boldsymbol{k}'^2-i\varepsilon} \tag{8}$$

であるから，第 1 象限と第 3 象限では正則である．そこで 4·15 図に示すような積分路に沿って被積分関数を積分したものは，Cauchy の定理により 0 である．図に示す正数 K を $+\infty$ にもっていくと，2 つの四分円からの寄与は 0 に近づくので，結局



4·15 図

* ゲージ・パラメーター α や微細構造常数 α とは無関係である．

k_0' の実軸に沿っての積分と虚軸に沿っての積分とは相等しいことがわかる．それゆえ，$k_0'=ik_4'$ とおくと，(8) は

$$\frac{d}{dp^2}F(p^2)=\frac{2}{(2\pi)^4}\int_0^1 d\alpha\int d^3k'\int dk_4'\frac{\alpha(1-\alpha)}{[V(p^2,\alpha)+\boldsymbol{k}'^2+k_4'^2-i\varepsilon]^3} \quad (9)$$

となる．(9) の k' 積分は 4 次元の極座標に変換すればすぐに遂行できて，

$$\frac{d}{dp^2}F(p^2)=\frac{1}{(4\pi)^2}\int_0^1 d\alpha\frac{\alpha(1-\alpha)}{V(p^2,\alpha)-i\varepsilon} \quad (10)$$

を得る．

複素変数 s を導入し，解析関数

$$\frac{d}{ds}F(s)\equiv\frac{1}{(4\pi)^2}\int_0^1 d\alpha\frac{\alpha(1-\alpha)}{V(s,\alpha)} \quad (11)$$

を考えると，これの $s=p^2+i\varepsilon$ という上半面からの境界値は $dF(p^2)/dp^2$ に等しい．(11) を s について積分し，α 積分を遂行すると

$$(4\pi)^2[F(s)-a]=\frac{\sqrt{R(s)}}{2s}\log\frac{-s+\mu_1{}^2+\mu_2{}^2+\sqrt{R(s)}}{-s+\mu_1{}^2+\mu_2{}^2-\sqrt{R(s)}}$$
$$-\frac{\mu_1{}^2-\mu_2{}^2}{2s}\log\frac{\mu_1{}^2}{\mu_2{}^2} \quad (12)$$

となる．ただし

$$R(s)\equiv[s-(\mu_1-\mu_2)^2][s-(\mu_1+\mu_2)^2]$$
$$=s^2-2(\mu_1{}^2+\mu_2{}^2)s+(\mu_1{}^2-\mu_2{}^2)^2 \quad (13)$$

で，a は無限大の常数である．

解析関数 $F(s)-a$ は実軸上 $s\geqq(\mu_1+\mu_2)^2$ にカットをもつ正則関数である．カット上の discontinuity (1-1 h 参照) は，(11) から

$$(2\pi)^{-1}\operatorname*{disc}_{s=p^2}F(s)=\pi^{-1}\,\mathrm{Im}\,F(p^2)$$
$$=\int_0^1 d\alpha\,\theta(-V(p^2,\alpha))$$
$$=(4\pi)^{-2}(\sqrt{R(p^2)}/p^2)\theta(p^2-(\mu_1+\mu_2)^2) \quad (14)$$

で与えられる．(12) は見かけ上 $s=0$ に極をもつように見えるけれども，実は $s=0$ で正則である*．このことは自己エネルギーの式でいつでも成立するので，計算結果のチェックに使える．

上のような解析性から明らかなように，s_0 をカット上にない任意の固定点とするとき，1-1 の (28) により

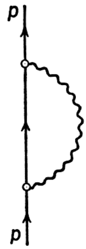
* Riemann 面の他のシートでは $s=0$ が極になることは (14) からわかる (5-3 b 参照)．

$$F(s)-F(s_0)=\frac{1}{(4\pi)^2}\int_{(\mu_1+\mu_2)^2}^{\infty}ds'\left[\frac{\sqrt{R(s')}/s'}{s'-s}-\frac{\sqrt{R(s')}/s'}{s'-s_0}\right]$$
$$=\frac{s-s_0}{(4\pi)^2}\int_{(\mu_1+\mu_2)^2}^{\infty}ds'\frac{\sqrt{R(s')}/s'}{(s'-s_0)(s'-s)} \qquad (15)$$

である．実用上は (12) よりも (15) の方が便利である．

4-5 b　電子の自己エネルギー　2次の電子の自己エネルギーは，4·16 図に示す Feynman 図に対応するもので，

$$\Sigma^{(2)}(p\,;\alpha)\equiv\frac{e^2}{(2\pi)^4 i}\int d^4k\,\gamma^\nu\frac{m+\gamma(p-k)}{m^2-(p-k)^2-i\varepsilon}\gamma^\mu$$
$$\times\left[\frac{-g_{\mu\nu}}{-k^2-i\varepsilon}-(1-\alpha)\frac{k_\mu k_\nu}{(-k^2-i\varepsilon)^2}\right] \qquad (16)$$



4·16 図

で与えられる．off mass shell すなわち $p^2=m^2$ とはおかないから，(16) はゲージ・パラメーター α に依存する．

$\alpha=1$ の場合は

$$\Sigma^{(2)}(p\,;1)=\frac{e^2}{(2\pi)^4 i}\int d^4k\frac{-4m+2\gamma(p-k)}{[m^2-(p-k)^2-i\varepsilon](-k^2-i\varepsilon)}$$
$$=e^2\int_{m^2}^{\infty}d\mu_1{}^2\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial p^\mu}F(p^2)\Big|_{\mu_2=0}-4e^2mF(p^2)\Big|_{\mu_1=m,\,\mu_2=0} \qquad (17)$$

であるから，スカラー粒子の自己エネルギーの結果から計算できる．$\alpha\neq 1$ の場合はもう少し面倒になるが同様な方針でやれる．結果は次の通りである．

$$\Sigma^{(2)}(p\,;\alpha)\equiv\gamma p\Sigma_1{}^{(2)}(p^2;\alpha)+\Sigma_2{}^{(2)}(p^2;\alpha) \qquad (18)$$

とおけば，$\Sigma_1{}^{(2)}$, $\Sigma_2{}^{(2)}$ はそれぞれスペクトル表示ができる．それらのスペクトル関数は，

$$\pi^{-1}\,\mathrm{Im}\,\Sigma_1{}^{(2)}(p^2;\alpha)=\alpha\frac{e^2}{(4\pi)^2}\left[1-\left(\frac{m^2}{p^2}\right)^2\right]\theta(p^2-m^2) \qquad (19)$$

$$\pi^{-1}\,\mathrm{Im}\,\Sigma_2{}^{(2)}(p^2;\alpha)=-(3+\alpha)\frac{e^2m}{(4\pi)^2}\left(1-\frac{m^2}{p^2}\right)\theta(p^2-m^2) \qquad (20)$$

で与えられる．(19), (20) を用いて形式的に

$$\Sigma_j{}^{(2)}(s\,;\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{m^2}^{\infty}ds'\frac{\mathrm{Im}\,\Sigma_j{}^{(2)}(s'\,;\alpha)}{s'-s}+\text{const} \qquad (j=1,\,2) \qquad (21)$$

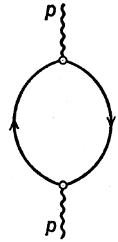
を計算すると，

$$\Sigma_1{}^{(2)}(s\,;\alpha)=\alpha\frac{e^2}{(4\pi)^2}\left[\frac{m^2}{s}-\left(1-\frac{m^4}{s^2}\right)\log\left(1-\frac{s}{m^2}\right)\right]+b_1 \qquad (22)$$

$$\Sigma_2{}^{(2)}(s\,;\alpha)=(3+\alpha)\frac{e^2m}{(4\pi)^2}\left(1-\frac{m^2}{s}\right)\log\left(1-\frac{s}{m^2}\right)+mb_2 \qquad (23)$$

を得る．ただし b_1 と b_2 は m に依存しない無限大の常数である*．もちろん (22), (23) は $s=0$ で極をもたない．

4-5 c 光子の自己エネルギー 2 次の光子の自己エネルギーの Feynman 図は 4·17 図で，その Feynman 積分は



4·17 図

$$\Pi_{\mu\nu}{}^{(2)}(p^2)$$
$$\equiv \frac{-e^2}{(2\pi)^4 i}\int d^4k \frac{\mathrm{tr}\{[m+\gamma(p+k)]\gamma_\mu(m+\gamma k)\gamma_\nu\}}{[m^2-(p+k)^2-i\varepsilon](m^2-k^2-i\varepsilon)} \tag{24}$$

である**．4-3 f で説明したように，この被積分関数に p^μ を掛けたものは，

$$\mathrm{tr}\left[\left(\frac{1}{m-\gamma(p+k)-i\varepsilon}-\frac{1}{m-\gamma k-i\varepsilon}\right)\gamma_\nu\right] \tag{25}$$

と書き直せて，第 1 項で $p+k=k'$ と変数変換すると形式的に 0 になる．これは光子の自己エネルギーのゲージ不変性を示すわけだが，(24) を正直に計算するとこの結論と矛盾した結果が得られる．これは積分が発散するため，k_μ と $k_\mu{}'$ の積分の無限遠からの寄与が相等しくないからである．ゲージ不変性を保ったままでやる計算法は 6-3 で述べるが，ここではスペクトル関数を計算するのでゲージ不変性に関する困難は起こらない．

(24) のトレースはすぐ計算できて，

$$4[m^2 g_{\mu\nu}+(p_\mu+k_\mu)k_\nu+k_\mu(p_\nu+k_\nu)-k(p+k)g_{\mu\nu}] \tag{26}$$

となる．(26) のうしろの 3 つの項からでてくる積分は

$$T_{\mu\nu}(p)\equiv\frac{1}{(2\pi)^4 i}\int d^4k\frac{(p_\mu+k_\mu)k_\nu}{[m^2-(p+k)^2-i\varepsilon](m^2-k^2-i\varepsilon)}$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^4 i}\cdot\frac{1}{4}\int_{m^2}^{\infty}d\mu_1{}^2\frac{\partial}{\partial p^\mu}\int_{m^2}^{\infty}d\mu_2{}^2$$
$$\times\left[\frac{\partial}{\partial q^\nu}\int d^4k\frac{1}{[\mu_1{}^2-(p+k)^2-i\varepsilon][\mu_2{}^2-(q+k)^2-i\varepsilon]}\right]_{q=0}$$
$$=\frac{1}{4}\int_{m^2}^{\infty}d\mu_1{}^2\frac{\partial}{\partial p^\mu}\int_{m^2}^{\infty}d\mu_2{}^2\left[\frac{\partial}{\partial q^\nu}F((p-q)^2)\right]_{q=0} \tag{27}$$

を用いて計算する．(27) の微分積分を遂行するには，(14) の α 積分を残した方の式を利用するのが便利である（演習問題 4.7 参照）．

---

* これらはもちろん α の 1 次式である．また 4-3 のゲージ不変性の証明により on mass shell の値 $m\Sigma_1{}^{(2)}(m^2;\alpha)+\Sigma_2{}^{(2)}(m^2;\alpha)$ は α に依存してはならない．

** 全体にかかっているマイナスはループ符号因子．

$$\pi^{-1}\,\mathrm{Im}\,T_{\mu\nu}(p)=\frac{(4\pi)^{-2}}{12}\left[(-p^2+4m^2)g_{\mu\nu}-2(p^2+2m^2)\frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right]$$
$$\times\sqrt{1-\frac{4m^2}{p^2}}\,\theta(p^2-4m^2) \tag{28}$$

(24), (26), (14), (28) から,

$$\Pi_{\mu\nu}{}^{(2)}(p)\equiv-(p^2g_{\mu\nu}-p_\mu p_\nu)\Pi^{(2)}(p^2) \tag{29}$$

と書くとき,

$$\pi^{-1}\,\mathrm{Im}\,\Pi^{(2)}(p^2)=\frac{e^2}{12\pi^2}\left(1+\frac{2m^2}{p^2}\right)\sqrt{1-\frac{4m^2}{p^2}}\,\theta(p^2-4m^2) \tag{30}$$

を得る. したがって, 初等積分計算により

$$\Pi^{(2)}(s)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty ds'\frac{\mathrm{Im}\,\Pi^{(2)}(s')}{s'-s}+\mathrm{const}$$
$$=\frac{e^2}{12\pi^2}\left(1+\frac{2m^2}{s}\right)\left[2-\sqrt{1-\frac{4m^2}{s}}\log\frac{\sqrt{1-4m^2/s}+1}{\sqrt{1-4m^2/s}-1}\right]+c \tag{31}$$

となる. ただし, c は m に無関係な無限大の常数である. $\Pi^{(2)}(s)-c$ はもちろん $s=0$ で極をもたない. 実際

$$\Pi^{(2)}(s)-c=\frac{e^2}{12\pi^2}\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\frac{s}{m^2}+O(s^2)\right] \tag{32}$$

である.

なお, (29) で $p^2g_{\mu\nu}-p_\mu p_\nu$ という因子がかかることは, **4-3 g** の定理の $r=2$ の場合の例として理解される.

4-6 赤外発散

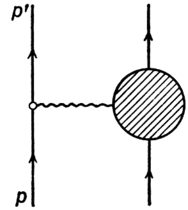
4次元運動量の極めて小さい光子を ♦軟光子 (soft photon) という. 軟光子は粒子性に乏しく, たくさんとび出せば電磁波としては観測されるだろうが, その量子的性格をとらえることはできない. すなわち, 一般に素粒子の反応において軟光子が何個とび出したかを知ることはできない.

ところが他方, Dyson の S 行列では終状態は Fock 空間の基底ベクトルによって指定されなければならないから, 軟光子といえどもその個数を明確にしなければ定義ができない. このために軟光子が生成される行列要素の計算は, 現実に即応しないことをやることになる. この軟光子が原因で S 行列要素はしばしば発散する. この困難を ♦赤外異変 (infrared catastrophe) あるいは ♦赤外発散 (infrared divergence) という. この発散は

Fock 空間を使うのをやめて軟光子の部分だけをとり出して正確に計算すれば，自動的に消失する．このことは実際電流を c 数で近似することにより確かめられる(♦Bloch(ブロッホ)-Nordsieck (ノルドジーク) の定理)*.



4·18 図

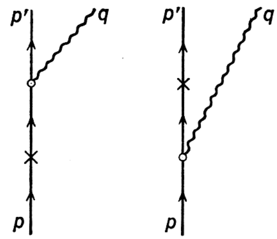


4·19 図

本節では赤外発散の問題を摂動論の各次数で調べる．

4-6 a 赤外発散の実例 4·18 図のような電子の外場による散乱を考える．外場 a_μ はFeynman 図では × 印で表わしてあるが，これは 4·19 図のような Feynman 図を省略して描いたものと思えばよい．

$p^2=p'^2=m^2$ であるから，$p'\neq p$ なる限り $(p-p')^2<0$ である**．この場合は，Compton 散乱と違って，4·20 図のように光子を出す場合その 4 次元運動量 q_μ はいくらでも小さくなり得る．つまり軟光子が出ることがある．



4·20 図

4·20 図の T 行列要素は，それぞれ

$$T_{10}=\frac{e}{(2\pi)^{9/2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2|\boldsymbol{q}|}}\cdot\frac{m}{\sqrt{E_pE_{p'}}}\bar{u}_{s'}(p')(\gamma\epsilon^{(\lambda)})\frac{m+\gamma(p'+q)}{m^2-(p'+q)^2-i\varepsilon}(\gamma a)u_s(p) \tag{1}$$

$$T_{01}=\frac{e}{(2\pi)^{9/2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2|\boldsymbol{q}|}}\cdot\frac{m}{\sqrt{E_pE_{p'}}}\bar{u}_{s'}(p')(\gamma a)\frac{m+\gamma(p-q)}{m^2-(p-q)^2-i\varepsilon}(\gamma\epsilon^{(\lambda)})u_s(p) \tag{2}$$

である．ここで T の添字の数字は，左が × 印よりあとの頂点の数，右が × 印より前の頂点の数を表わす．

$$(m-\gamma p)u_s(p)=0,\qquad \bar{u}_{s'}(p')(m-\gamma p')=0,\qquad p^2=p'^2=m^2 \tag{3}$$

を使うと

$$q_0=|\boldsymbol{q}|\ll m \tag{4}$$

の場合，近似的に (以下軟光子の近似式には ≒ を用いる)

$$T_{10}+T_{01}\doteqdot\epsilon^{(\lambda)}{}_\mu\beta^\mu(q)T_{00} \tag{5}$$

と書ける．ただし

---

* このことはもっと場の量子論的に状態ベクトルを変換して示すこともできる．

** なぜなら $\boldsymbol{p}'=0$ の系で $(p-p')^2=-2m(E_p-m)$.

$$T_{00}=\frac{1}{(2\pi)^3}\cdot\frac{m}{\sqrt{E_pE_{p'}}}\bar{u}_{s'}(p')(\gamma a)u_s(p) \tag{6}$$

は 4·18 図の T 行列要素であり，

$$\beta_\mu(q)\equiv-\frac{e}{(2\pi)^{3/2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2|\boldsymbol{q}|}}\left(\frac{p'^\mu}{p'q}-\frac{p^\mu}{pq}\right) \tag{7}$$

とする．

遷移確率の比

$$R\equiv\sum_\lambda\int d^3q\,|T_{10}+T_{01}|^2\Big/|T_{00}|^2 \tag{8}$$

を計算するさい，λ の和は $\lambda=1,2$ だけでなく，ゲージ不変性を使って q_μ に比例する項をもつけ加えて勘定する．すなわち*

$$\sum_\lambda(\epsilon^{(\lambda)}{}_\mu\beta^\mu)^2=\sum_\lambda(\epsilon^{(\lambda)}{}_\mu\beta^\mu)^2+(q_\mu\beta^\mu)^2/|\boldsymbol{q}|^2=-\beta^2 \tag{9}$$

を使うと，

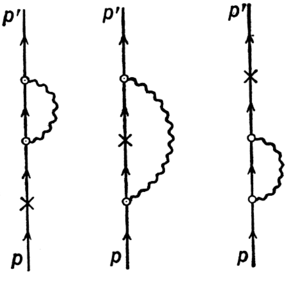
$$R\doteqdot\frac{e^2}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3q}{2|\boldsymbol{q}|}\left[-\frac{m^2}{(p'q)^2}+\frac{2p'p}{(p'q)(pq)}-\frac{m^2}{(pq)^2}\right] \tag{10}$$

を得る．この各項は対数発散する．それらが相殺しないかどうかは特別な Lorentz 系で調べてみればよい．たとえば $\boldsymbol{p}=0$ の系で考えると，$\cos\theta\equiv\boldsymbol{p}'\boldsymbol{q}/|\boldsymbol{p}'||\boldsymbol{q}|$ とするとき，

$$R\doteqdot\frac{e^2}{2(2\pi)^3}\int\frac{d^3q}{|\boldsymbol{q}|^3}\cdot\frac{\boldsymbol{p}'^2(1-\cos^2\theta)}{(E_{p'}-|\boldsymbol{p}'|\cos\theta)^2} \tag{11}$$

となって，明らかに $|\boldsymbol{q}|=0$ の近傍から対数発散する．これが赤外発散である．

4-6 b　赤外発散の相殺　はじめに注意したように，軟光子の数は観測できないので，軟光子のでない反応とでる反応とは実験的に区別がつかない．それで 4·21 図のような4·18 図に対する e^2 のオーダーの補正の Feynman 図からの寄与も考慮しなければならない．4·21 図のそれぞれの T 行列要素は，



4·21 図

$$T_{20}=\frac{ie^2}{(2\pi)^7}\cdot\frac{m}{\sqrt{E_pE_{p'}}}\int d^4q\,\bar{u}_{s'}(p')\gamma^\mu\frac{m+\gamma(p'-q)}{m^2-(p'-q)^2-i\varepsilon}\gamma_\mu\times$$

* この式は 4-1 の (35) で中間状態 $|c\rangle$ を正ノルムの物理的状態に限ってよいことを，量子電磁力学につき具体的に示すものである．

$$\times \frac{m+\gamma p'}{m^2-p'^2-i\varepsilon}(\gamma a)u_s(p)\frac{1}{-q^2-i\varepsilon} \tag{12}$$

$$T_{11}=\frac{ie^2}{(2\pi)^7}\cdot\frac{m}{\sqrt{E_pE_{p'}}}\int d^4q\,\bar{u}_{s'}(p')\gamma^\mu\frac{m+\gamma(p'-q)}{m^2-(p'-q)^2-i\varepsilon}(\gamma a)$$

$$\times \frac{m+\gamma(p-q)}{m^2-(p-q)^2-i\varepsilon}\gamma_\mu u_s(p)\frac{1}{-q^2-i\varepsilon} \tag{13}$$

$$T_{02}=\frac{ie^2}{(2\pi)^7}\cdot\frac{m}{\sqrt{E_pE_{p'}}}\int d^4q\,\bar{u}_{s'}(p')(\gamma a)\frac{m+\gamma p}{m^2-p^2-i\varepsilon}\gamma^\mu$$

$$\times \frac{m+\gamma(p-q)}{m^2-(p-q)^2-i\varepsilon}\gamma_\mu u_s(p)\frac{1}{-q^2-i\varepsilon} \tag{14}$$

で，

$$R'\equiv 2\,\mathrm{Re}[T_{00}^*(T_{20}+T_{11}+T_{02})]/|T_{00}|^2 \tag{15}$$

を勘定する必要がある．

軟光子の近似で

$$T_{00}^*T_{11}/|T_{00}|^2 \doteqdot \frac{ie^2}{(2\pi)^4}\int d^4q\frac{pp'}{(p'q-i\varepsilon)(pq-i\varepsilon)(-q^2-i\varepsilon)} \tag{16}$$

であるから，下半面で Cauchy の定理を用いて q_0 積分を遂行すると，

$$2T_{00}^*T_{11}/|T_{00}|^2 \doteqdot -\frac{e^2}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3q}{2|\boldsymbol{q}|}\cdot\frac{2pp'}{(p'q)(pq)} \tag{17}$$

となる．ただし (17) では $q_0=|\boldsymbol{q}|$ とする．これはちょうど (10) の第 2 項を相殺する．

(15) の第 1 項の計算は，(12) の $1/(m^2-p'^2-i\varepsilon)$ のところに直接 $p'^2=m^2$ をもち込むと意味のない結果を生ずるから注意を要する．それゆえ，分母では $p'^2=m^2$ とおかないで計算する．しかし分子では (3) を用いることができる．なぜなら，このため生ずる誤差は (12) からわかるように赤外発散を含まないからである．

まず T_{20} の q_0 積分を遂行すると，

$$\int d^4q\frac{1}{[m^2-(p'-q)^2-i\varepsilon](-q^2-i\varepsilon)} \doteqdot 2\pi i\int\frac{d^3q}{2|\boldsymbol{q}|}\cdot\frac{1}{2p'q+m^2-p'^2} \tag{18}$$

となる．ただし右辺では $q_0=|\boldsymbol{q}|$．ゆえに

$$T_{00}^*T_{20}$$

$$\doteqdot \frac{-e^2}{(2\pi)^9}\cdot\frac{4m^4}{E_pE_{p'}}\int\frac{d^3q}{2|\boldsymbol{q}|}\cdot\frac{|\bar{u}_{s'}(p')(\gamma a)u_s(p)|^2}{(2p'q+m^2-p'^2)(m^2-p'^2-i\varepsilon)}$$

$$=\frac{-e^2}{(2\pi)^9}\cdot\frac{8m^4}{E_p}\int\frac{d^3q}{2|\boldsymbol{q}|}\int dp_0'\frac{\theta(p_0')\delta(p'^2-m^2)|\bar{u}_{s'}(p')(\gamma a)u_s(p)|^2}{(2p'q+m^2-p'^2)(m^2-p'^2-i\varepsilon)} \tag{19}$$

と書ける．ここで第2行では p_0' は $E_{\boldsymbol{p}'}$ ではなく新たな積分変数と考えている．したがって，

$$\mathrm{Re}\, T_{00}{}^* T_{20} \fallingdotseq \frac{-e^2}{(2\pi)^9}\cdot\frac{8m^4}{E_{\boldsymbol{p}}}\int\frac{d^3q}{2|\boldsymbol{q}|}\int dp_0'\frac{\theta(p_0')}{2p'q+m^2-p'^2}\left(\mathrm{P}\frac{1}{m^2-p'^2}\right)$$
$$\times\delta(p'^2-m^2)|\bar{u}_{s'}(p')(\gamma a)u_s(p)|^2 \tag{20}$$

となる．ところで，超関数の積の公式 1-1 の (25) により

$$\left(-\mathrm{P}\frac{1}{p'^2-m^2}\right)\delta(p'^2-m^2)=\frac{1}{2}\delta'(p'^2-m^2) \tag{21}$$

であり，また $\theta(p_0')\delta(p'^2-m^2)=(2E_{\boldsymbol{p}'})^{-1}\delta(p_0'-E_{\boldsymbol{p}'})$ の両辺を m^2 で偏微分してわかるように

$$\theta(p_0')\delta'(p'^2-m^2)=\frac{1}{4E_{\boldsymbol{p}'}{}^3}\delta(p_0'-E_{\boldsymbol{p}'})+\frac{1}{4E_{\boldsymbol{p}'}{}^2}\delta'(p_0'-E_{\boldsymbol{p}'}) \tag{22}$$

である．これらを (20) に代入して p_0' 積分を遂行する．その結果が赤外発散を生ずるのは，(22) の第2項の δ' を部分積分して δ にするとき $(2p'q+m^2-p'^2)^{-1}$ が p_0' について微分されるからである．したがって，軟光子近似ではそれ以外の寄与は無視してよい．こうして

$$2\,\mathrm{Re}\, T_{00}{}^* T_{20}/|T_{00}|^2 \fallingdotseq +\frac{e^2}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3q}{2|\boldsymbol{q}|}\cdot\frac{m^2}{(p'q)^2} \tag{23}$$

を得る．(23) はちょうど (10) の第1項を相殺する．

全く同様にして，

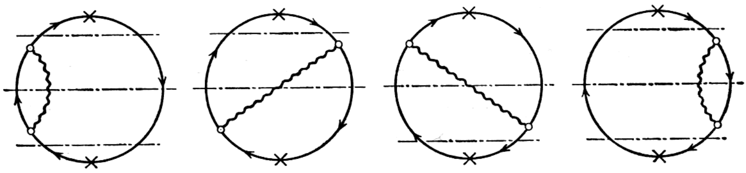
$$2\,\mathrm{Re}\, T_{00}{}^* T_{02}/|T_{00}|^2 \fallingdotseq +\frac{e^2}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3q}{2|\boldsymbol{q}|}\cdot\frac{m^2}{(pq)^2} \tag{24}$$

となり，(10) の第3項を相殺する．結局

$$R+R' \fallingdotseq 0 \tag{25}$$

が成立する．つまり赤外発散は遷移確率では消失する．

4-6 c 相殺の機構の分析 以上説明した赤外発散の相殺の機構は，次のような図を作ってみると見やすい．遷移確率に必要な2つの Feynman 図の組み合せを，T^* の方は矢印の向きを逆向きにし，初期状態と終状態



4・22 図

でそれぞれ対応する外線をつないで，真空偏極の Feynman 図のようなものを作る．このような図を K 図（K-graph）と呼ぶ．上の例の K 図は 4・22 図の 4 つ（ただし (b) と (b′) は本質的に同じ）になる．各破線は T^*T の中の 1 項の初期状態（右側）と終状態（左側）の位置を指示しており，破線の下が T の Feynman 図，上が T^* の Feynman 図（の矢印を逆にしたもの）である．それぞれの K 図は，

(a) $T_{00}{}^*T_{20}+T_{10}{}^*T_{10}+T_{20}{}^*T_{00}$

(b) $T_{00}{}^*T_{11}+T_{01}{}^*T_{10}$

(b′) $T_{10}{}^*T_{01}+T_{11}{}^*T_{00}$

(c) $T_{00}{}^*T_{02}+T_{01}{}^*T_{01}+T_{02}{}^*T_{00}$

を表わす．ただし，$T_{10}{}^*T_{10}$ などの $\sum_{\lambda}\int d^3q$ は省略した（行列の積と思えばよい）．(b′) は (b) の複素共役である．上で説明したように，(a), (b), (b′), (c) はそれぞれで赤外発散が相殺している．つまり各 K 図からの寄与は赤外発散を含まない．その本質的理由は次の通りである．

まず分子は一切本質的な役割を演じていない．それらはつねに共通因子であるので考慮の対象にしなくてよい*．次に光子の伝播関数は，

$$\frac{1}{(2\pi)^4 i}\cdot\frac{1}{-q^2-i\varepsilon}=\frac{1}{(2\pi)^3}\theta(q_0)\delta(q^2)+\frac{1}{(2\pi)^4 i}\cdot\frac{1}{-q^2+iq_0\varepsilon} \tag{26}$$

というふうに分解してみる．これは $q_0>0$ のときと $q_0<0$ のときとを分けて考えればすぐ証明できる．(26) の第 2 項は，q_0 に関して Cauchy の定理を使って積分路を下半面に曲げることにより，原点からいくらでも遠ざけることができる**．それゆえ，赤外発散の問題を考えるときは第 2 項を無視して差し支えない．(26) の第 1 項は初期状態や終状態にある現実の光子（(9) のようにタテ波とスカラー波とは相殺するから）と同じ式である．したがって光子も共通因子として扱える．

残るのは，電子の部分の伝播関数の分母あるいは on mass shell を表わすデルタ関数だけである．たとえば，(b) については，主要な部分は

$$T_{00}{}^*T_{11}\sim\theta(p_0{}')\delta(m^2-p'^2)\frac{1}{m^2-(p'+q)^2-i\varepsilon}\cdot\frac{1}{m^2-(p+q)^2-i\varepsilon}$$
$$\times\theta(p_0)\delta(m^2-p^2) \tag{27}$$

---

* 軟光子近似では T 行列要素の分子はつねに $\bar{u}(p')(\gamma a)u(p)$ に c 数を掛けた形に帰着する．

** p. 204 の補注参照.

$$T_{01}{}^*T_{10} \sim \frac{1}{m^2-p^2+i\varepsilon}\theta(p_0{}')\delta(m^2-p'^2)\frac{1}{m^2-(p'+q)^2-i\varepsilon}$$
$$\times\theta(p_0+q_0)\delta(m^2-(p+q)^2) \tag{28}$$

のようになる．ここで T_{11} の q_μ は $-q_\mu$ に変換し，T_{10}，T_{01} では p_μ の代りに $p_\mu+q_\mu$ を用いた．したがって，

$$T_{00}{}^*T_{11}+T_{01}{}^*T_{10} \sim F(p,q)\theta(p_0)\theta(p_0{}')\delta(m^2-p'^2)\frac{1}{m^2-(p'+q)^2-i\varepsilon} \tag{29}$$

となる．ただし

$$F(p,q) \equiv \frac{1}{m^2-(p+q)^2-i\varepsilon}\delta(m^2-p^2)+\delta(m^2-(p+q)^2)\frac{1}{m^2-p^2+i\varepsilon}$$
$$=\frac{1}{2pq+q^2}[-\delta(m^2-p^2)+\delta(m^2-(p+q)^2)] \tag{30}$$

である．軟光子の近似で

$$F(p,q) \fallingdotseq -\delta'(m^2-p^2) \tag{31}$$

となり，(30) の各項がもっていた $1/pq$ の特異性が消失する．それゆえ赤外発散が消える．(b′) についても同様である．(a)，(c) の場合はそれぞれ 3 つの項を合わせると特異性が消失するが，それを具体的にやるよりも一般論をやる方が賢明である．

4-6 d　一般的考察　赤外発散の起こる一般的機構は次の通りである．上で指摘したように，軟光子は内線外線を区別する必要はなく $\theta(q_0)\delta(q^2)$ と考えてよい．これは q_0 について積分すると $1/|\boldsymbol{q}|$ の特異性を示す．したがって，4 次元積分下で考えると，2 次の特異性をもつものとみなしてよい．これを ♦第 1 種特異性と呼ぶ．第 1 種特異性だけならば赤外発散はめったに起こらない．実際，量子電磁力学の場合は第 1 種特異性だけで赤外発散が起こることはない．問題は電子の伝播関数の分母で，これの 4 次元運動量が電子の外線のそれと軟光子の分だけしか違っていないと 1 次の特異性を示すことである．これを ♦第 2 種特異性という．

上にあげた例で見たように，第 1 種特異性を示す軟光子と，第 2 種特異性を示す電子の内線 2 本と，合わせて 4 次の特異性となり，これが軟光子の運動量に関する 4 次元積分をしたときに対数発散を生ずる原因となるわけである．このことはもっと一般的に軟光子がいくつもからみ合っていても成立する．すなわち，軟光子の数を $\bar{N}_r$（ただし 4-3 g の定理により r 個の軟光子だけに囲まれたループがあれば，そのおのおのに対応して $r/2$

を減ずる)，第2種特異性を示す電子の内線の数を $\bar{N}_e$，軟光子の運動量をすべて積分するのに必要な4次元積分の数を $\bar{\kappa}$ とするとき，K 図のどの部分をとってもつねに

$$\bar{d}\equiv 2\bar{N}_\gamma+\bar{N}_e-4\bar{\kappa}<0 \tag{32}$$

が成りたっていれば赤外発散は起こらないが，もしそうでなければ赤外発散が起こるものと期待される．しかし，量子電磁力学では数学的帰納法ですぐ示されるように，$\bar{d}$ を最大にするのは $\bar{\kappa}=\bar{N}_\gamma=2\bar{N}_e$ の場合であり，$\bar{d}=0$ すなわち対数発散しか起こらない．したがって，1つの K 図から生ずるいくつかの Feynman 図の対の寄与を加え合わせることにより，第2種特異性が少なくとも1つ下がることを示せば*，赤外発散の相殺が証明されたことになる．

4-6 e 相殺の一般的証明 すでに注意したように，要するに第2種特異性をもつ電子の内線と電子の外線にだけ注目すればよい．これらは K 図では軟光子の入っている頂点をはさんで並んでおり，そういうものが1つの K 図の中で一般にいくつかあるであろう．今その1本に着目すると，本質的な部分は

$$F_k\equiv\left(\prod_{j=k+1}^{r}\frac{1}{m^2-(p+q_j)^2+i\varepsilon}\right)\delta(m^2-(p+q_k)^2)\left(\prod_{j=1}^{k-1}\frac{1}{m^2-(p+q_j)^2-i\varepsilon}\right) \tag{33}$$

のような形をしているであろう．ここに q_j ($j=1, 2, \cdots, r$) は軟光子の4次元運動量である (これらの間にいくつかの一次関係があってもよい)．(33)は k 番目のところに破線を入れた場合にあたる．軟光子だけの違いは観測できないから，(33)をすべての番号 k について加えたもの

$$F\equiv\sum_{k=1}^{r}F_k \tag{34}$$

を考える必要がある．以下で，$q_j\to 0$ ($j=1, 2, \cdots, r$) のとき，個々の F_k は超関数として意味をもたなくなるのにかかわらず，その和 F は超関数として意味をもつことを証明する．

まず $K_1, \cdots, K_r$ を実数とするとき，

$$\sum_{k=1}^{r}\left[\left(\prod_{j=k+1}^{r}\frac{1}{K_j+i\varepsilon}\right)\delta(K_k)\left(\prod_{j=1}^{k-1}\frac{1}{K_j-i\varepsilon}\right)\right]=\frac{1}{\pi}\,\mathrm{Im}\left(\prod_{j=1}^{r}\frac{1}{K_j-i\varepsilon}\right) \tag{35}$$

という公式の成立することを数学的帰納法により証明する．$r=1$ のときは自明だから，(35) が成立するとすると，1-1 の (20) を使って

* 軟光子の近似をしているから，それ以上の詳しいことは何もいえない．

$$\sum_{k=1}^{r+1}\left(\prod_{j=k+1}^{r+1}\frac{1}{K_j+i\varepsilon}\right)\delta(K_k)\left(\prod_{j=1}^{k-1}\frac{1}{K_j-i\varepsilon}\right)$$

$$=\frac{1}{K_{r+1}+i\varepsilon}\cdot\frac{1}{\pi}\,\mathrm{Im}\left(\prod_{j=1}^{r}\frac{1}{K_j-i\varepsilon}\right)+\delta(K_{r+1})\prod_{j=1}^{r}\frac{1}{K_j-i\varepsilon}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\mathrm{P}\frac{1}{K_{r+1}}\cdot\mathrm{Im}\left(\prod_{j=1}^{r}\frac{1}{K_j-i\varepsilon}\right)+\pi\delta(K_{r+1})\mathrm{Re}\left(\prod_{j=1}^{r}\frac{1}{K_j-i\varepsilon}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\,\mathrm{Im}\prod_{j=1}^{r+1}\frac{1}{K_j-i\varepsilon} \tag{36}$$

となるからである.

次に 4-5 の (2) の拡張である '一般化された Feynman の恒等式*(generalized Feynman identity)

$$\prod_{j=1}^{r}\frac{1}{A_j}=(r-1)!\int_{\varDelta}\frac{d^{r-1}\alpha}{\left(\sum_{j=1}^{r}\alpha_jA_j\right)^r} \tag{37}$$

を用いる (演習問題 4.8 参照). ただし

$$\int_{\varDelta}d^{r-1}\alpha(\cdots)\equiv\int_0^\infty d\alpha_1\cdots\int_0^\infty d\alpha_r\delta\left(1-\sum_{j=1}^{r}\alpha_j\right)(\cdots) \tag{38}$$

は有界な領域 $\varDelta\equiv\left\{\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_r\,\middle|\,\alpha_j\geqq0\ (j=1,\ \cdots,\ r),\ \sum_{j=1}^{r}\alpha_j=1\right\}$ における $r-1$ 次元積分とみなせる. (37) と 1-1 の (21) から

$$\frac{1}{\pi}\,\mathrm{Im}\left(\prod_{j=1}^{r}\frac{1}{K_j-i\varepsilon}\right)=(-1)^{r-1}\int_{\varDelta}d^{r-1}\alpha\delta^{(r-1)}\left(\sum_{j=1}^{r}\alpha_jK_j\right) \tag{39}$$

を得る.

(35), (39) を (33), (34) に代入すると

$$F=(-1)^{r-1}\int_{\varDelta}d^{r-1}\alpha\cdot\delta^{(r-1)}\left(m^2-\sum_{j=1}^{r}\alpha_j(p+q_j)^2\right) \tag{40}$$

となる. したがって, $q_j\to0$ のとき

$$F\longrightarrow[(-1)^{r-1}/(r-1)!]\delta^{(r-1)}(m^2-p^2) \tag{41}$$

である. すなわち, 第2種特異性が消えることが赤外発散相殺の理由である.

4-6 f unitary 性の使用についての注意 (35) は S 行列の unitary 性の式 4-1 の (36) と感じが似ているが, 内容は全く異なる. (35) は全くの恒等式であり, それは1個の電子に対して適用される. unitary 性の方は確率の保存の要請からでてくるものであり, 一般には終状態にいくつもの電子が存在するがその全体にしか適用できないものである. したがって,

* この式は数学的には古くから知られていたものである.

上述の赤外発散相殺の証明は unitary 性を用いて行なうことはできない.

赤外発散が消えるのは S 行列の unitary 性の帰結だと考えている人がかなりあるが，これは誤りである．Dyson の S 行列の unitary 性は，摂動級数に展開したときの各次数で成立するものである．これに対し，一般論で $S^{\dagger}S=1$ からいえる S の有界性は，S を閉じた形に書いたときにのみいえることである．両者は質的に異なり，S 行列の有界性を摂動論に適用することは論理的に正しくない．さらにまた，S 行列が形式的に unitary であっても赤外部から起こってくる発散がいつでも消失するとは限らない．たとえば量子電磁力学において Møller 散乱のときに見られた荷電粒子の前方散乱 ($p_\mu'=p_\mu$) の無限大は決して相殺されない．量子電磁力学をはなれるともっといろいろ発散の消失しない場合が起こりうる.

演習問題 4.

4.1 2–7 の (13) の核子パイ中間子系の荷電独立な理論に対する Feynman 規則を作れ.

4.2 前問の結果を用いて，陽子陽子散乱の G^2 のオーダーの S 行列要素を書け.

4.3 Compton 散乱，Møller 散乱の e^4 のオーダーの Feynman 図をすべて描け.

4.4 Klein–Nishina の公式から Compton 散乱の全断面積を計算せよ.

4.5 演習問題 4.1 の規則を用いて，2 次の核子の自己エネルギーの Feynman 積分を書き，これのスペクトル関数 $\pi^{-1}\,\mathrm{Im}\,\Sigma^{(2)}(p)$ を計算せよ.

4.6 演習問題 3.6 のスペクトル関数の G^2 近似を $\rho_1^{(2)}(\kappa^2)$, $\rho_2^{(2)}(\kappa^2)$ とするとき，

$$\gamma p\rho_1^{(2)}(\kappa^2)+\rho_2^{(2)}(\kappa^2)=(m-\gamma p)^{-1}\pi^{-1}[\mathrm{Im}\,\Sigma^{(2)}(p)](m-\gamma p)^{-1}|_{p^2=\kappa^2}$$

である．前問の結果を代入し，演習問題 2.9 の不等式の G^2 近似 $\kappa\rho_1^{(2)}(\kappa^2)\geqq|\rho_2^{(2)}(\kappa^2)|$ が成立することを確かめよ．この不等式は電子に対しては成立しない．なぜか.

4.7 4–5 の (28) を導け.

4.8 一般化された Feynman の恒等式 4–6 の (37) を数学的帰納法により証明せよ.

[p. 200 への補注] 2 電子間に交換される光子の場合，q_0 に関して積分路を曲げるには極をよぎらなくてはならないということが起こる．この留数から生ずる発散は各 K 図では相殺しないが，全部まとめると相因子(Coulomb 相因子という)となり，遷移確率にはきかない [文献 (4.7) 参照].

5. Feynman 積分の一般論

5-1 Feynman パラメーター公式

4-5 で簡単な Feynman 積分を計算したが，もっと複雑な Feynman 積分を実際に計算することは極めて大変な仕事である．しかしながら，一般の Feynman 積分でも，一般化された Feynman の恒等式 **4-6** の (37) を用いると分母が 1 つにまとまり 4 次元運動量積分を全部遂行することが可能である．こうして得られる Feynman パラメーターに関する積分を Feynman 積分の ♦Feynman パラメーター公式 (Feynman-parametric formula) という．Feynman パラメーター公式は，もちろん Feynman 積分の計算に有用であるが，それよりもむしろその理論的研究にとって必要欠くべからざるものである．

本章では Feynman パラメーター公式の一般的考察を行なう．以下本章では考える Feynman 図 G はつねに連結であるものとし，G の内線の数を N，頂点の数を n，連結度を κ で表わす．

5-1 a　Feynman 伝播関数の変形　**4-3 b** で述べたように，スカラー粒子の Feynman 伝播関数に $(2\pi)^4 i$ を掛けたものは，

$$\frac{1}{m_l^2-(k_l+q_l)^2-i\varepsilon_l} \tag{1}$$

と書くことができる．ただし，質量は内線 l ごとに異なりうるように μ^2 の代りに m_l^2 と一般化し，また ε も有限の数のように考えて $\varepsilon_l\,(>0)$ と書いた．4 次元運動量 p_l は $p_l=k_l+q_l$ と分解し，k_l は基底運動量の一次結合として書ける積分変数，q_l は外線運動量の一次結合で書けるような積分変数を含まない部分とした．すなわち頂点 a に入る外線の運動量の代数和を p_a とすると (**4-3 b, d** 参照)

$$\sum_l \begin{bmatrix} a \\ l \end{bmatrix} k_l = 0 \tag{2}$$

$$\sum_l \begin{bmatrix} a \\ l \end{bmatrix} q_l + p_a = 0 \tag{3}$$

である．しかし，以下の一般論では q_l は必ずしも (3) を満足すると限定しない方が便利である．実際こうして q_l と m_l^2 という自由なパラメーターを導入しておくと，4-5 でやったように，スピノル粒子の伝播関数は

$$\frac{m_l+\gamma(k_l+q_l)}{m_l^2-(k_l+q_l)^2-i\varepsilon_l} = (m_l+\gamma D_l)\frac{1}{m_l^2-(k_l+q_l)^2-i\varepsilon_l} \tag{4}$$

のように分子を積分変数を含まない形に書き改めることができる．ここで

$$D_l \equiv \frac{1}{2}\int_{m_l^2}^{\infty} dm_l^2 \frac{\partial}{\partial q_l} \tag{5}$$

である*．微分結合も同様に D_l で書き表わせる．ただし同じ l に対して 2 個以上 D_l を使う必要がある場合には，k_l+q_l をそのまま D_l に直すと第 2 の D_l を作用させるとき，(5) の $\partial/\partial q_l$ が第 1 の D_l によってもたらされる分子の k_l+q_l に作用しておつりの項を生ずるから注意を要する．この場合は，第 2 の D_l は第 1 の D_l とは独立なものであるとしてやれば正しい結果が得られる．

光子や中性ベクトル粒子のゲージ項は，同じ D_l が 2 つ必要な例であるが，これはたとえば光子のゲージ項については

$$\frac{(k_l+q_l)_\mu(k_l+q_l)_\nu}{[-(k_l+q_l)^2-i\varepsilon_l]^2} = \left[(D_l)_\mu \frac{1}{m_l^2-(k_l+q_l)^2-i\varepsilon_l}\right]\left[(D_l)_\nu \frac{1}{m_l^2-(k_l+q_l)^2-i\varepsilon_l}\right]\Bigg|_{m_l=0} \tag{6}$$

のように書けばよい．

以上をまとめると，一般の Feynman 積分は必ずスカラー粒子のみの場合の Feynman 積分**

$$I(q, m^2) \equiv \frac{1}{[(2\pi)^4 i]^\kappa}\left(\prod_{j=1}^{\kappa}\int d^4k_j\right)\prod_l \frac{1}{m_l^2-(k_l+q_l)^2-i\varepsilon_l} \tag{7}$$

にガンマ行列などを含んだ D_l の多項式 $F(D)$ を作用させたものとして表

* (5) の積分変数の m_l^2 と積分の下限の m_l^2 とは数学的には別の量である．しかしこれを区別して別の記号を使うと，(4) の方も $m_l+\gamma D_l$ というような形には書けなくなり記述が極めて繁雑になるので，(5) ではあえて数学的に不正確な記法を用いた．

** 係数は 4-1 の (34) の T 行列の定義に合わせてある．

わすことができる*. 光子などのゲージ項は仮想的に2つの内線を直列に並べた Feynman 図を考えておけばよい.

なお, q_l, m_l^2, D_l などを G の内線 l 全体につきまとめて考えたいときは, それぞれ q, m^2, D などのように添字を書かないで表わすことにする.

5-1 b 回路指標 (7) において $k_1, \cdots, k_\kappa$ はもちろん基底運動量である. 4次元運動量の保存により, これらのそれぞれは Feynman 図の内線を円周状に一周して流れるはずである. 一般に Feynman 図の内線の集合で円周状になっているものを ♦ループ (loop) あるいは ♦回路 (circuit) という. しかしループという言葉はスピノル粒子だけでの場合に限定して使うことが多いので, グラフ理論や電流回路網理論で用いられる回路という言葉の方を用いることにする.

k_j が流れる回路を C_j とすると, 一般の k_l は

$$k_l = \sum_{j=1}^{\kappa} \begin{bmatrix} C_j \\ l \end{bmatrix} k_j \tag{8}$$

と書き表わすことができる. ここに $\begin{bmatrix} C \\ l \end{bmatrix}$ は ♦回路指標 (circuit number) と呼ばれるもので, 一周する向きを決めた任意の回路 C に対して次のように定義される. $l \in C$ のとき $\begin{bmatrix} C \\ l \end{bmatrix} = \pm 1$ で, 符号は C の向きと p_l の向きが l 上で同じときはプラス, 逆向きのときはマイナス, $l \notin C$ のときは $\begin{bmatrix} C \\ l \end{bmatrix} = 0$ とする. (8) で C_j の向きはもちろん k_j の流れる向きである. したがって, とくに $k_j = k_{l_j}$ なる l_j に対しては,

$$\begin{bmatrix} C_i \\ l_j \end{bmatrix} = \delta_{ij} \tag{9}$$

となる.

回路 C が頂点 a を通るとき, C は必ず a を端点とする2つの内線 l_1, l_2 を含むはずであるが, C の向きは一方の内線については外から a に向かい, 他方の内線については a から外へ向かっているから, つねに

$$\begin{bmatrix} a \\ l_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ l_1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} a \\ l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ l_2 \end{bmatrix} \tag{10}$$

---

* ゲージ不変量の計算は通常 Feynman ゲージで行なう. そのさい光子の伝播関数から $F(D)$ に寄与するのは $-g^{\mu\nu}$ である. このマイナスを忘れやすいから注意せよ.

が成立する．ただし $\begin{bmatrix} a \\ l \end{bmatrix}$ は 4-3 a で導入した接合指標である．(10)は0に等しい項をつけ加えて書き直すと

$$\sum_l \begin{bmatrix} a \\ l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ l \end{bmatrix} = 0 \tag{11}$$

となる．ここに和は G のすべての内線 l にわたってとるものとする．C が a を通らない場合は(11)の各項は0だから，(11)は任意の頂点 a と任意の回路 C に対してつねに成立する式である．$\begin{bmatrix} a \\ l \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} C \\ l \end{bmatrix}$ は，l を成分の番号とみるとき，N 次元のベクトルとみなすことができる．そうすると，(11)は2つのベクトルの直交関係とみることができる．4-3 の(15)の関係式

$$\sum_{j=1}^{n} \begin{bmatrix} a_j \\ l \end{bmatrix} = 0 \tag{12}$$

は，n 個のベクトル $\begin{bmatrix} a_j \\ l \end{bmatrix}$ $(j=1, \cdots, n)$ の間に一次関係が成りたつことを示す．Feynman 図 G は連結であるので，(12)以外にはベクトル $\begin{bmatrix} a_j \\ l \end{bmatrix}$ の間に一次関係はない．したがって，ベクトル $\begin{bmatrix} C \\ l \end{bmatrix}$ は $n-1$ 個の一次独立なベクトルと直交するから，その一次独立なものの数は $N-(n-1)=\kappa$ である．これは独立な積分変数の数が κ であることの回路指標によるいいかえである．

5-1 c　運動量積分の遂行　運動量はもちろん4次元ベクトルであるが，Feynman 積分を遂行するときにとくに4次元に話を限る必要はない．実際，次元を一般の ν 次元に拡張しておいた方があとで便利であるので，以下運動量を ν 次元のベクトルと考える．ただし，その計量は $(1, -1, -1, \cdots, -1)$ のように時間成分は1個のままに保っておく．このとき考える Feynman 積分は

$$I(q, m^2; \nu) \equiv \frac{1}{(2\pi)^{\nu\kappa} i^{\kappa}} \left(\prod_{j=1}^{\kappa} \int d^{\nu} k_j \right) \prod_l \frac{1}{m_l^2 - (k_l + q_l)^2 - i\varepsilon_l} \tag{13}$$

となる．ここに k_l, q_l は ν 次元のベクトルである．

(13)を計算するのに，一般化された Feynman の恒等式 4-6 の(37)を用いるのが普通のやり方であるが，ここでは最近よく用いられる Gauss (ガウス)積分に帰着させる方法を説明しよう．

まず K_l を実数とするとき，

$$\frac{1}{K_l-i\varepsilon_l}=i\int_0^\infty d\alpha_l \exp[-i\alpha_l(K_l-i\varepsilon_l)] \tag{14}$$

という等式が成立することに注意する．(13) の各伝播関数に (14) の表示を用い，α 積分と運動量積分の順序を交換すると，

$$I=\frac{i^{N-\kappa}}{(2\pi)^{\nu\kappa}}\left(\prod_l \int_0^\infty d\alpha_l\right)\left(\prod_{j=1}^{\kappa}\int d^\nu k_j\right)\exp[-i\Phi-\varepsilon(\alpha)] \tag{15}$$

となる．ただし

$$\Phi\equiv\sum_l \alpha_l[m_l^2-(k_l+q_l)^2] \tag{16}$$

$$\varepsilon(\alpha)\equiv\sum_l \alpha_l\varepsilon_l>0 \tag{17}$$

である．Φ は (8) を代入すると，$k_1, \cdots, k_\kappa$ の 2 次式であって，

$$\Phi=-\sum_{i=1}^{\kappa}\sum_{j=1}^{\kappa}u_{ij}k_ik_j-2\sum_{j=1}^{\kappa}\hat{q}_jk_j+L \tag{18}$$

と書くことができる．ただし

$$u_{ij}\equiv\sum_l \begin{bmatrix}C_i\\l\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_j\\l\end{bmatrix}\alpha_l \tag{19}$$

$$\hat{q}_j\equiv\sum_l \begin{bmatrix}C_j\\l\end{bmatrix}\alpha_l q_l \tag{20}$$

$$L\equiv\sum_l \alpha_l(m_l^2-q_l^2) \tag{21}$$

とおいた．

κ 次の対称行列 $\mathcal{U}\equiv(u_{ij})$ は直交行列 $\mathcal{L}$ を用いて対角化できる．すなわち，$\mathcal{L}^{-1}=\mathcal{L}^T$ なる行列 $\mathcal{L}$ により

$$\mathcal{U}_D\equiv\mathcal{L}^{-1}\mathcal{U}\mathcal{L}=(\lambda_j\delta_{ij}) \tag{22}$$

となる．ここで固有値 λ_j ($j=1, \cdots, \kappa$) は $\alpha>0$ のとき (すなわちすべての l につき $\alpha_l>0$ のとき) すべて正である．なぜなら，$x_1, \cdots, x_\kappa$ を任意の (同時には 0 でない) 実数とするとき

$$\sum_i\sum_j u_{ij}x_ix_j=\sum_l \alpha_l\left(\sum_j\begin{bmatrix}C_j\\l\end{bmatrix}x_j\right)^2>0 \tag{23}$$

であるからである．$\alpha_l=0$ のところは積分領域の端点なので異常積分の意味で定義すればよいから，以下の考察で $\alpha>0$ と仮定しても差し支えない．そのときは $\mathcal{U}$ は非特異であるから逆行列 $\mathcal{U}^{-1}$ が存在する．$\mathcal{U}^{-1}$ はもちろん対称行列である．その行列要素を $v_{ij}=v_{ji}$ とすると，定義により

$$\sum_j u_{ij}v_{jk}=\sum_j v_{ij}u_{jk}=\delta_{ik} \tag{24}$$

である．そこで

$$k_j = k_j' - \sum_{j'} v_{jj'} \hat{q}_{j'} \tag{25}$$

と変数変換すると，(18)は

$$\Phi = -\sum_i \sum_j u_{ij} k_i' k_j' + V \tag{26}$$

$$V \equiv L + \sum_i \sum_j v_{ij} \hat{q}_i \hat{q}_j \tag{27}$$

となる．さらに，直交行列 $\mathcal{L}$ を用いて2次形式を対角化する変数変換を行なえば，

$$\Phi = -\sum_j \lambda_j k_j''^2 + V \tag{28}$$

となる．$\det \mathcal{L} = 1$ であるから，この変換の Jacobian は1である．したがって，

$$J \equiv \left(\prod_{j=1}^{\kappa} \int d^\nu k_j'' \right) \exp\left(i \sum_{j=1}^{\kappa} \lambda_j k_j''^2 \right) \tag{29}$$

を計算すればよい．

(29)は $\nu\kappa$ 個の1変数の積分の積である．$\lambda > 0$ のとき

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{i\lambda x^2} = e^{i\pi/4} (\pi/\lambda)^{1/2} \tag{30}$$

である．これはよく知られた Gauss 積分の公式を，Cauchy の定理を使って積分路を実軸から反時計まわりに 45° だけまわすことによって得られる．k_j'' の時間成分については(30)を，$\nu-1$ 個の空間成分については(30)の複素共役をとった式を(29)に適用すると，

$$J = e^{-i(\pi/4)(\nu-2)\kappa} \pi^{\nu\kappa/2} \prod_{j=1}^{\kappa} \lambda_j^{-\nu/2} \tag{31}$$

を得る．

$$\prod_{j=1}^{\kappa} \lambda_j = \det \mathcal{V}_D = \det \mathcal{V} \equiv U \tag{32}$$

に注意して，以上の結果をまとめると，

$$I = c_\nu \left(\prod_l \int_0^\infty d\alpha_l \right) e^{-iV - \varepsilon(\alpha)} / U^{\nu/2} \tag{33}$$

となる．ただし c_ν は常数係数で，$i = e^{i\pi/2}$ を使って

$$c_\nu \equiv \frac{e^{i(\pi/4)(2N - \nu\kappa)}}{2^{\nu\kappa} \pi^{\nu\kappa/2}} \tag{34}$$

である．

5-1 d　*D* の演算　(33)によって，スカラー伝播関数のみの場合の Feynman 積分の Feynman パラメーター公式が求まったわけだから，あ

とはこれに $F(D)$ を作用させれば一般の場合のパラメーター公式が得られる.

U は α のみの関数であるから, D は V のみに作用することに注意する. V は m_l^2 を $\sum_l \alpha_l m_l^2$ という形でのみ含んでいるから, D_l の中の m_l^2 積分は極めて容易に遂行できる*. すなわち

$$Y_l \equiv -\frac{1}{2\alpha_l}\cdot\frac{\partial V}{\partial q_l} \tag{35}$$

とおくと

$$D_l e^{-iV} = Y_l e^{-iV} \tag{36}$$

である. Y_l は q を含むが m^2 を含まない. したがって

$$X_{ll'} \equiv -\frac{1}{\alpha_{l'}}\frac{\partial Y_l}{\partial q_{l'}} = X_{l'l} \tag{37}$$

とおけば,

$$D_{l'} D_l e^{-iV} = [Y_l Y_{l'} + (i/2) X_{ll'}] e^{-iV} \tag{38}$$

となる. V は q に関して 2 次式であったから, $X_{ll'}$ はもはや運動量をも全く含まない Feynman パラメーターだけの関数である. それゆえ, これ以上新しい関数を導入する必要はなく, 一般の場合の式が次のように書き下せる.

$$\left(\prod_{k=1}^{r} D_k\right) e^{-iV} = \sum_{\mathrm{div}} (i/2)^m X_{k_1k_2} X_{k_3k_4} \cdots X_{k_{2m-1}k_{2m}} \cdot Y_{k_{2m+1}} \cdots Y_{k_r} \cdot e^{-iV} \tag{39}$$

ただし記号簡略のため, 添字の l_k などは k と略記した. 和の意味は 4-2 b の Wick の定理のときと全く同じで, $(1, 2, \cdots, r)$ の中から m 個 (m は $0 \leqq m \leqq r/2$ の範囲で動かす) の数の対を選び出すすべての可能な組み合せについてとる. (39) の証明は数学的帰納法によってすぐできる.

5-1 e 被積分関数の有理化 Feynman パラメーター公式 (33) はくりこみを論ずるときに重要である. しかし, Feynman 積分の解析性を論ずるためには次のように変形した方が便利である.

まず u_{ij}, $\hat{q}_j$, L などはすべて α の 1 次斉次式であることに注意する. このことから直ちに, U は α につき κ 次斉次, V は 1 次斉次, Y_l は 0 次斉次, $X_{ll'}$ は -1 次斉次であることが知られる.

さて, (33) に $1 = \int_0^\infty d\beta\, \delta(\beta - \sum_l \alpha_l)$ を掛けてから, すべての l につき $\alpha_l = \beta\alpha_l'$ と変数変換すると, 上の注意により

---

* $m_l^2 = \infty$ からの寄与はおちるものとする.

$$I=c_\nu\int_0^\infty d\beta\Big(\prod_l\int_0^\infty d\alpha_l'\Big)\delta\Big(1-\sum_l\alpha_l'\Big)\beta^{N-(\nu\kappa/2)-1}\frac{e^{-i\beta[V'-i\varepsilon(\alpha')]}}{U'^{\nu/2}} \tag{40}$$

となる．ただし U', V' は U, V の Feynman パラメーター α を α' におきかえたものである．(40) の β についての積分は Cauchy の定理により第2種 Euler (オイラー) 積分に帰着するから，$N-\frac{1}{2}\nu\kappa>0$ のとき

$$I=c_\nu e^{-i(\pi/4)(2N-\nu\kappa)}\Gamma\Big(N-\frac{1}{2}\nu\kappa\Big)\Big(\prod_l\int_0^\infty d\alpha_l'\Big)\frac{\delta(1-\sum_l\alpha_l')}{U'^{\nu/2}[V'-i\varepsilon(\alpha')]^{N-(\nu\kappa/2)}} \tag{41}$$

を得る．α' の代りに α と書き，c_ν に (34) を代入すると，

$$I=\frac{\Gamma\Big(N-\frac{1}{2}\nu\kappa\Big)}{2^{\nu\kappa}\pi^{\nu\kappa/2}}\Big(\prod_l\int_0^\infty d\alpha_l\Big)\frac{\delta(1-\sum_l\alpha_l)}{U^{\nu/2}(V-i\varepsilon)^{N-(\nu\kappa/2)}} \tag{42}$$

という Feynman パラメーター公式が得られる*．ただし $\varepsilon(\alpha)$ は各 $\alpha_l\geqq 0$ のいかんにかかわらず微小正数だから ε と書いた．一般化された Feynman の恒等式を用いて Feynman 積分の運動量積分を遂行する方法では，直接 (42) が得られる．その場合は，(33) を導くには今やったことの逆操作を行なえばよい．

$N-\frac{1}{2}\nu\kappa\leqq 0$ のときにも使える公式を導くためには，$N-\frac{1}{2}\nu\kappa+k>0$ となるような正の整数 k をとり，最初 (33) に

$$1=\frac{(i\Lambda)^k}{(k-1)!}\int_0^\infty d\alpha_0\cdot\alpha_0^{k-1}\exp[-i\alpha_0\Lambda-\varepsilon_0\alpha_0] \qquad (\Lambda>0) \tag{43}$$

を掛けて同じ手続きで変形すればよい(演習問題 5.1 参照)．この結果，分母の V は $V+\alpha_0\Lambda$ におきかわる．

(42) に対して D を作用させると，$\rho\equiv N-\frac{1}{2}\nu\kappa$ とするとき，

$$\Big(\prod_{k=1}^r D_k\Big)\frac{1}{(V-i\varepsilon)^\rho}=\sum_{\rm div}\frac{X_{k_1k_2}\cdots X_{k_{2m-1}k_{2m}}\cdot Y_{k_{2m+1}}\cdots Y_{k_r}}{2^m\Big[\prod_{j=1}^m(-\rho+j)\Big](V-i\varepsilon)^{\rho-m}} \tag{44}$$

である．

なお，1-1 の (21) により $\nu=4$ のとき I の虚部は

$$\pi^{-1}\,{\rm Im}\,I=\frac{1}{(4\pi)^{2\kappa}}\Big(\prod_l\int_0^\infty d\alpha_l\Big)\frac{\delta(1-\sum_l\alpha_l)}{U^2}\delta^{(N-2\kappa-1)}(-V) \tag{45}$$

---

* (42) の α 積分を遂行したいときは積分領域を $N-1$ 次元単位立方体に変換するのが便利である．たとえば $N=4$ のとき，$\alpha_1=xyz$, $\alpha_2=(1-x)yz$, $\alpha_3=(1-y)z$, $\alpha_4=1-z$ (このとき Jacobian は yz^2)，あるいは $\alpha_1=xz$, $\alpha_2=(1-x)z$, $\alpha_3=y(1-z)$, $\alpha_4=(1-y)(1-z)$ (このときの Jacobian は $z(1-z)$) と変換せよ．

で与えられる．ただし $N-2\kappa\leqq 0$ のときは，$\delta^{(N-2\kappa-1)}(-V)$ を

$$\frac{(-V)^{2\kappa-N}}{(2\kappa-N)!}\theta(-V) \tag{46}$$

でおきかえるものとする．

5-2 位相公式

前節で与えた Feynman パラメーター公式は，U, V, Y_l, $X_{ll'}$ という 4 種類の Feynman パラメーターの関数を含んでいる．これらを計算するのにいちいち元の Feynman 積分に戻っていたのでははなはだ不便である．そこで本節では，これらの関数の具体的な一般式を与える．これらは Feynman 図の位相幾何学的な性質を反映したものになるので，♦位相公式 (topological formula) と呼ばれている．

5-2 a U の位相公式 まず U の定義 5-1 の (32), (19) により

$$U\equiv\det\mathcal{U}=\det\left(\sum_l\begin{bmatrix}C_i\\l\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_j\\l\end{bmatrix}\alpha_l\right) \tag{1}$$

である．(1) は見かけ上，特定の基底運動量 $\{k_1, \cdots, k_\kappa\}$ に対応する回路 $C_1, \cdots, C_\kappa$ に依存しているように見える．しかしながら，デルタ関数を消去する前の Feynman 積分では特定の基底運動量を優先する理由がないから当然期待されることであるが，U は基底運動量の選び方には無関係な量であることが証明できる．

ところで 5-1 の(9)からわかるように，$k_j=k_{l_j}$ なる l_j $(j=1, 2, \cdots, \kappa)$ に対しては α_{l_j} は係数 $+1$ で行列 $\mathcal{U}$ の主対角線上にのみ含まれる．それゆえ，U は $\prod_{j=1}^{\kappa}\alpha_{l_j}$ という項を含むはずである．しかも上で注意したように U は基底運動量の選び方にはよらない量であるから，

$$U=\sum_{T^*}\prod_{l_j\in T^*}\alpha_{l_j}+\hat{U} \tag{2}$$

と書くことができるはずである．ただし $T^*\equiv\{l_1, \cdots, l_\kappa\}$ は $\{k_{l_1}, \cdots, k_{l_\kappa}\}$ が基底運動量であるような κ 個の内線の集合で，グラフ理論では ♦補樹木 (cotree あるいは chord set) と呼ばれているものである．(2) で和は Feynman 図 G のすべての補樹木についてとる．また $\hat{U}$ は $\bigcup_{j=1}^{\kappa}\{l_j'\}$ が*

* $\{l_1', \cdots, l_\kappa'\}$ のように書かないのは，この中に同じものがあるかもしれないからである．

補樹木でないような積 $\prod_{j=1}^{\kappa}\alpha_{l_j'}$ の一次結合である．

帰謬法で $\widehat{U}\equiv 0$ を証明しよう．もし $\widehat{U}\neq 0$ ならば，そのうちの 1 項 $\prod_{j=1}^{\kappa}\alpha_{l_j'}$ を考える．$k_{l_1'}, \cdots, k_{l_\kappa'}$ は一次独立ではないのだから，その中の一次独立なものを $k_{l_s}, \cdots, k_{l_\kappa}$ とすると，$s\geqq 2$ である．これを含む基底運動量 $\{k_{l_1}, \cdots, k_{l_\kappa}\}$ をとり，これらの流れる回路を $C_1, \cdots, C_\kappa$ とすれば，$k_{l_1'}, \cdots, k_{l_\kappa'}$ は k_{l_1} なしに表わせるはずだから，C_1 は $l_1', \cdots, l_\kappa'$ のいずれをも含まない．いま $l\in C_1$ なるすべての α_l を 0 とおくことを $\alpha(C_1)=0$ と書くことにする．回路指標の定義から

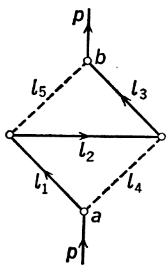
$$\sum_l \begin{bmatrix} C_1 \\ l \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_j \\ l \end{bmatrix}\alpha_l=0 \qquad (\alpha(C_1)=0 \text{ のとき}) \tag{3}$$

であるから，$\alpha(C_1)=0$ のとき (1) の右辺は 0，したがって $U=0$ である．他方，任意の積分運動量は基底運動量で表わされるゆえ，任意の補樹木 T^* に対し $T^*\cap C_1\neq\phi$ (ϕ は空集合を表わす) であるから，(2) から $\alpha(C_1)=0$ のとき $U=\widehat{U}$ である．しかし，$\widehat{U}$ が $\prod_{j=1}^{\kappa}\alpha_{l_j'}$ に比例する項を含むから $\alpha(C_1)=0$ のとき $\widehat{U}\neq 0$ である．これは矛盾である．したがって，$\widehat{U}\equiv 0$ でなければならない．（証明終）

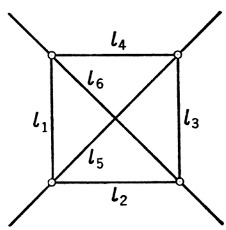
以上によって U に対する位相公式

$$U=\sum_{T^*}\prod_{l\in T^*}\alpha_l \tag{4}$$

が得られた．たとえば，5·1 図および 5·2 図* に対しそれぞれ



5·1 図



5·2 図

$$U=(\alpha_1+\alpha_4)\alpha_2+\alpha_2(\alpha_3+\alpha_5)+(\alpha_3+\alpha_5)(\alpha_1+\alpha_4) \tag{5}$$

$$\begin{aligned}U=&\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_4+\alpha_1\alpha_2\alpha_6+\alpha_1\alpha_3\alpha_4+\alpha_1\alpha_3\alpha_5+\alpha_1\alpha_3\alpha_6+\alpha_1\alpha_4\alpha_5\\&+\alpha_1\alpha_5\alpha_6+\alpha_2\alpha_3\alpha_4+\alpha_2\alpha_3\alpha_5+\alpha_2\alpha_4\alpha_5+\alpha_2\alpha_4\alpha_6+\alpha_2\alpha_5\alpha_6+\alpha_3\alpha_4\alpha_6\\&+\alpha_3\alpha_5\alpha_6+\alpha_4\alpha_5\alpha_6\end{aligned} \tag{6}$$

である．ただし α_{l_j} と書くべきところを α_j と略記した．具体例では今後いつでもこのように l を省略して書く．

5-2 b　樹木　公式 (4) を使いこなすには補樹木についての知識が必要

* 矢印のない実線は粒子の種類を指定しないときに使う．

である．補樹木 T^* はその名が示す通り，♦樹木(tree) T の $|G|$ に対する補集合である（つまり $T^*\cap T=\phi$, $T^*\cup T=|G|$）．ただし，$|G|$ は G の内線全部の集合を表わす．樹木は回路を含まない極大な（すなわち1つでも内線をつけ加えれば回路を含むような）集合である．

樹木 T は次のような性質をもっている．

［性質 1］ T は回路を含まない．

［性質 2］ T に内線を1つでもつけ加えると回路を含む．

［性質 3］ 図形として T は連結である．

［性質 4］ G の任意の頂点は少なくとも1つの T に属する内線の端点になっている．すなわち，T はすべての頂点を通る．

［性質 5］ G の任意の2つの頂点を結び T に含まれる通路がただ1つ存在する．

［性質 6］ $n\geqq 2$ のとき，T の端になる頂点，すなわちそれを端点とする内線がただ1つしか T に含まれないような頂点は，少なくとも2つある．

［性質 7］ T の内線の数は $n-1$ に等しい．

性質1と2は樹木の定義そのものである．性質3と4は，もしそうでなければまだ回路を含まないように T に内線をつけ加えられるはずだからである．性質5の♦通路(path)とは，2つの頂点を結ぶ連結な内線の集合のうち極小なもの，すなわち結び目のないひも状の集合をいう（たとえば5・1図で $\{l_4, l_2, l_5\}$ のようなものは a と b を結ぶ通路である）．通路の存在は性質3と4から明らかである．また通路が2つ以上あれば回路が T に含まれてしまう．性質6は T に含まれる極大な通路を考えれば明らかである．性質7は T の端に着目し，頂点の数 n について数学的帰納法を使えばすぐいえる．（証明終）

樹木 T に，T に属さない内線を1つつけ加えて得られる集合を♦擬樹木(pseudotree)という．擬樹木 T^0 は樹木の性質5によりただ1つの回路を含む．

ある内線の集合 T が樹木であることを証明するには，必ずしも樹木の定義に戻らなくても

（a） 性質 1, 3, 4 をもつこと，

（b） 性質 1, 7 をもつこと，

（c） 性質 3, 4, 7 をもつこと，

のいずれかを示せば十分であることが，次のようにして証明される．

(a)：性質3と4により，T に属さない任意の内線 l の両端を結ぶ通路 P が存在するから，T に l をつけ加えると回路 $P\cup\{l\}$ を含む．ゆえに T は回路を含まない極大な集合である．(b)：もし T が樹木でなければ T を真の部分集合として含む樹木 T' が存在しなければならないが，それは性質7に反する．(c)：もし T が回路を含めば性質3と4を保ったまま回路に属する線を逐次とり除いて回路を含まない T の真の部分集合 T' が作れる．(a) により T' は樹木であるはずだが，それは性質7に矛盾する．(証明終)

上に掲げた樹木の性質は，必ずしも補樹木の性質に簡単に翻訳できるとは限らない．性質1は，補樹木は任意の回路との共通部分が空でない，といいかえられる．性質2は，いかなる回路とも空でない共通部分をもつような内線の集合は補樹木を含む，となる（なぜなら補樹木はそのような極小な集合だから）．性質7は，補樹木の内線の数が $N-n+1=\kappa$ であることにほかならない．しかし，性質 3～6 はいいかえが難しい．したがっていろいろな証明をするときに，補樹木で考えるよりも，その補集合の樹木に移って考える方が便利なことが多い．ただし次の命題だけは補樹木であることを直接立証するのによく使う：どの回路とも空でない共通部分をもつような κ 個の内線の集合は補樹木である．なぜなら，その補集合は樹木の性質1と7を満たすからである．

5-2 c 基本回路系 基底運動量 $\{k_{l_1},\cdots,k_{l_\kappa}\}$ の流れる回路 $C_1,\cdots,C_\kappa$ は

$$C_k\not\subset\bigcup_{j\neq k}C_j \qquad (k=1,2,\cdots,\kappa) \tag{7}$$

という性質をもつ．なぜなら，$T^*\equiv\{l_1,\cdots,l_\kappa\}$ とするとき，

$$l_k\in C_k,\qquad l_k\notin C_j\quad(j\neq k) \tag{8}$$

だからである．(7) のような回路の組 $\{C_1,\cdots,C_\kappa\}$ を ◆基本回路系 (fundamental set of circuits) という．

補樹木 $T^*=\{l_1,\cdots,l_\kappa\}$ が与えられると，樹木の性質5により l_k の両端を結び樹木 $T\equiv|G|-T^*$ に含まれる通路 P_k がただ1つ存在する．そうすると，P_k に l_k をつけ加えて得られる回路 C_k は (8) を満足する．したがって，$\{C_1,\cdots,C_\kappa\}$ は基本回路系である．

逆に $\{C_1,\cdots,C_\kappa\}$ を基本回路系とすると，(7) によって κ 個のベクト

ル $\begin{bmatrix} C_k \\ l \end{bmatrix}$ $(k=1, \cdots, \kappa)$ は一次独立である．なぜなら，(8) のような l_k が存在して

$$\begin{bmatrix} C_j \\ l_k \end{bmatrix} = \delta_{jk} \qquad (j, k=1, \cdots, \kappa) \tag{9}$$

となるからである．ただし l_k の向きと C_k の向きは一致するものとした (5-1 の (9) 参照)．したがって，任意の回路 C に対応するベクトル $\begin{bmatrix} C \\ l \end{bmatrix}$ は必ず

$$\begin{bmatrix} C \\ l \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{\kappa} e_j \begin{bmatrix} C_j \\ l \end{bmatrix} \tag{10}$$

のように書き表わされるはずである．もちろん $e_1, \cdots, e_\kappa$ はすべては 0 ではありえないから，たとえば $e_k \neq 0$ とすると，(9) により

$$\begin{bmatrix} C \\ l_k \end{bmatrix} = e_k \neq 0 \tag{11}$$

である．ゆえに，$T^* \equiv \{l_1, \cdots, l_\kappa\}$ と C の共通部分は l_k を含むから空でない．また T^* は κ 個の内線から成るから，T^* は補樹木でなくてはならない．

このようにして，基底運動量 $\{k_{l_1}, \cdots, k_{l_\kappa}\}$ を直接表面に出さないで，基本回路系の概念からグラフ理論的に補樹木 T^* を特徴づけることができる．

5-2 d　V の回路表示　さて次に，V の位相公式を導こう．5-1 の (27), (21) から

$$V = \sum_l \alpha_l (m_l{}^2 - q_l{}^2) + \sum_i \sum_j v_{ij} \hat{q}_i \hat{q}_j \tag{12}$$

である．ここに $\hat{q}_j$ は 5-1 の (20) により

$$\hat{q}_j = \sum_l \begin{bmatrix} C_j \\ l \end{bmatrix} \bar{q}_l \tag{13}$$

である．ただし $\bar{q}_l \equiv \alpha_l q_l$ とおく．v_{ij} は $\mathcal{U}^{-1}$ の行列要素であるから，u_{ij} に対応する $\mathcal{U}$ の余因子 (すなわち小行列式に符号因子 $(-1)^{i+j}$ を掛けたもの) を $\mathcal{U}_{ij}$ とすると，

$$v_{ij} = \mathcal{U}_{ij} / \det \mathcal{U} = \mathcal{U}_{ij} / U \tag{14}$$

と書ける．

V の位相公式を与えるために，まず次の関数を定義する．

$$U_C \equiv \sum_{T^{0*} \cap C = \phi} \prod_{l \in T^{0*}} \alpha_l \tag{15}$$

ここに C は任意の回路で，T^{0*} は C を含むような擬樹木 T^0 の補集合である．もう少しわかりやすくいうと，U_C は G の中の回路 C の内線をすべて1点に収縮して得られるような Feynman 図の U 関数である．一般に K を G の内線の集合とするとき，K に属する内線をすべて1点に収縮して得られるような Feynman 図を G の ♦縮約図 (reduced graph) といい，G/K で表わす．縮約図は Feynman 積分の解析性やくりこみ理論において極めて重要な概念である．この記法を用いると，U_C は縮約図 G/C の補樹木に対応する α_l の積の総和である．したがってもちろん，それは $\kappa-1$ 次の斉次多項式である．$\kappa=1$ のときは $U_C\equiv 1$ とする．

さて，任意の $\bar{q}_l$ につき等式

$$\sum_i\sum_j \mathcal{V}_{ij}\hat{q}_i\hat{q}_j=\sum_C U_C\left(\sum_l\begin{bmatrix}C\\ l\end{bmatrix}\bar{q}_l\right)^2 \tag{16}$$

が成立することを証明しよう．右辺で和は G のすべての回路についてとるものとする．(16) の証明の間は $\bar{q}_l=\alpha_l q_l$ という関係式のことは忘れて，$\bar{q}_l$ は α_l とは独立な量として扱う．そうすると (16) の両辺とも α の $\kappa-1$ 次の斉次多項式である．

V は基底運動量の選び方には依存しないはずだから，(16) の左辺は基本回路系の選択にはよらない量である．したがって，任意に与えられた回路 C に対し，$C_1\equiv C$ であるような基本回路系 $\{C_1, \cdots, C_\kappa\}$ をとって，それについて考えてよい．U の証明のときと同様に $\alpha(C)=0$ とおくと，$\mathcal{V}$ の第1行と第1列はすべて0になるから，余因子の定義により $i=j=1$ を除き

$$\mathcal{V}_{ij}=0 \qquad (\alpha(C)=0 \text{ のとき}) \tag{17}$$

となる．また $\mathcal{V}_{11}$ で $\alpha(C)=0$ としたものは G/C における $\det\mathcal{V}$ と同じ形をしているから，

$$\mathcal{V}_{11}=U_C \qquad (\alpha(C)=0 \text{ のとき}) \tag{18}$$

である．したがって，(16) の左辺は $\alpha(C)=0$ のとき

$$U_C\hat{q}_1{}^2=U_C\left(\sum_l\begin{bmatrix}C\\ l\end{bmatrix}\bar{q}_l\right)^2 \tag{19}$$

となる．

他方 C と異なる任意の回路 C' に対して，

$$U_{C'}=0 \qquad (\alpha(C)=0 \text{ のとき}) \tag{20}$$

である．なぜなら，C に属して C' に属さない内線の全体は縮約図 G/C'

ではつねに少なくとも1つの回路を含むゆえ，それは G/C' のいかなる補樹木とも空でない共通部分をもつからである．したがって，$\alpha(C)=0$ のとき(16)の右辺も(19)に一致する．

そこで(16)を証明するために両辺の差を R としよう．これはもちろん α の $\kappa-1$ 次の斉次多項式であり，かつ上で証明したように G の任意の回路 C に対し $\alpha(C)=0$ のとき $R=0$ である．しかしいかなる $\kappa-1$ 個の内線の集合も G の補樹木を含むことはできないから，それがすべての回路と空でない共通部分をもつことは不可能である．したがって $R\equiv0$ でなければならない．(証明終)

(14),(16)を(12)に代入すると，V の位相公式

$$V=\sum_l \alpha_l(m_l^2-q_l^2)+U^{-1}\sum_C U_C\Bigl(\sum_l \begin{bmatrix} C \\ l \end{bmatrix}\alpha_l q_l\Bigr)^2 \tag{21}$$

が得られる．たとえば5·1図について

$$\begin{aligned}V=\sum_{j=1}^{5}\alpha_j(m_j^2-q_j^2)+U^{-1}[&(\alpha_1+\alpha_4)(\alpha_2q_2+\alpha_3q_3-\alpha_5q_5)^2\\&+\alpha_2(\alpha_1q_1+\alpha_5q_5-\alpha_3q_3-\alpha_4q_4)^2+(\alpha_5+\alpha_3)(\alpha_1q_1+\alpha_2q_2-\alpha_4q_4)^2]\end{aligned} \tag{22}$$

のようになる．ただし U は(5)で与えられる．運動量の向きは，l_1, l_2, l_3 は矢印の向き，l_4, l_5 は上向きにとった．

V の位相公式は3つばかりあるので，(21)をとくに♦回路表示(circuit representation)という．

5-2 e 切断集合 Feynman 図 G が連結であることは一貫して仮定しているが，もちろん G の内線のいくつかを切断すれば非連結になる．内線の集合 K のすべての線を切断して，つまり K の各内線を2つの外線でおきかえて，G から得られる Feynman 図を $G-K$ で表わす．$G-S$ が非連結になる極小な内線の集合 S を♦切断集合(cut-set)という．たとえば，5·1図の $\{l_1, l_4\}$ や $\{l_5, l_2, l_4\}$ は切断集合である．5·2図の $\{l_1, l_2, l_3, l_4\}$ のようにちょっとわかりにくい切断集合もあるから注意を要する．切断集合はグラフ理論での用語であるが，Feynman 図では物理的に重要な概念であって，しばしば♦中間状態(intermediate state)とも呼ばれる．これは，そこで G を切断するとその切断個所を初期状態あるいは終状態とする2つの連結な Feynman 図が得られるからである．ただし，中間状態というときは原則としてこれらの2つの連結な Feynman 図がどちらも元からの外線をもつことを想定しているので，外線のことに無関係にいい

たいときは切断集合という言葉を用いる.

1つの内線 l だけで切断集合になっている場合, その内線 l を ♦分離線 (cut-line) という. 分離線はいかなる回路にも含まれない. 逆にいかなる回路にも含まれない内線は分離線だけである. したがって, いかなる樹木も必ずすべての分離線を含む. G が分離線を全く含まないとき, すなわちすべての切断集合が少なくとも2つの内線を含むとき, G は ♦強連結 (strongly connected) であるという.

切断集合 S に関していろいろのことを証明するのに極めて便利な性質がある. それは S と共通要素をもたない任意の内線の集合 K に対し, S が G の切断集合であることと, S が縮約図 G/K の切断集合であることとが同等であることである. なぜなら, S を定義する命題は K を縮約することとは無関係だからである.

任意の回路 C と任意の切断集合 S との共通部分 $C\cap S$ に属する内線の数は偶数である. このことは, 2つの頂点しかもたない縮約図 $G/(|G|-S)$ で考えれば自明である.

内線の集合 K に対し, $G-K$ がちょうど2つの連結成分から成るための必要十分条件は, K がただ1つの切断集合を含むことである. このことは, K を切断したときの連結成分の数は縮約図 $G/(|G|-K)$ の頂点の数に等しいことから明らかである.

樹木 T からその中の任意の1つの内線 l をとり除いて得られる $n-2$ 個の内線の集合を ♦2樹木 (2-tree) といい, T^2 で表わす. 任意の2樹木 T^2 にはそれと共通要素をもたない切断集合 S がただ1つ存在する. なぜなら, 樹木の性質3と4から明らかなように, T^2 は2つの連結部分から成りかつすべての頂点を通るから, 補集合 $T^{2*}\equiv|G|-T^2$ を切断すると G は2つの連結成分に分かれる. したがって, T^{2*} はただ1つの切断集合 S を含む.

切断集合 S の向きを, $G-S$ の2つの連結成分の順序によって定義する. たとえば, 5·1図で $S=\{l_1, l_4\}$ ならば, a のある側から b のある側へというふうに向きを指定する. そうすると接合指標や回路指標と同様に ♦切断集合指標 (cut-set number) $\begin{bmatrix} S \\ l \end{bmatrix}$ を定義することができる. すなわち, $l\in S$ のとき $\begin{bmatrix} S \\ l \end{bmatrix}=\pm1$ で, 符号は l の向き (p_l の向き) と S の向きとが一致するときプラス, 逆向きならマイナス, $l\notin S$ のとき $\begin{bmatrix} S \\ l \end{bmatrix}=0$ とする.

$G-S$ の2つの連結成分を H, H' とし，S の向きを H から H' の向きとする．そのとき任意の内線 l に対し

$$\begin{bmatrix} S \\ l \end{bmatrix} = \sum_{a \in H} \begin{bmatrix} a \\ l \end{bmatrix} \tag{23}$$

が成立する．ただし和は H に属するすべての頂点についてとるものとする．なぜなら，$l \notin S$ のときは $\begin{bmatrix} a \\ l \end{bmatrix} \neq 0$ なる2つの頂点はともに H か H' のどちらか一方だけに属するから，(23) の両辺は 0 である．また $l \in S$ のときは l の一方の端点だけが H に属するから (23) の両辺は ± 1 で，その符号も明らかに一致している．

(23) と 5-1 の (11) とから

$$\sum_{l} \begin{bmatrix} S \\ l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ l \end{bmatrix} = 0 \tag{24}$$

という直交関係が得られる．

5-2 f　V の切断集合表示　以上の準備のもとに V の ♦切断集合表示 (cut-set representation) を与えよう．(21) は任意の q に対し恒等的に

$$V = \sum_{l} \alpha_l m_l^2 - U^{-1} \sum_{S} W_S \left(\sum_{l} \begin{bmatrix} S \\ l \end{bmatrix} q_l \right)^2 \tag{25}$$

に等しい．ただし和はすべての切断集合 S についてとり，W_S は

$$W_S \equiv \sum_{T^{2*} \supset S} \prod_{l \in T^{2*}} \alpha_l \tag{26}$$

によって定義される α の $\kappa+1$ 次の斉次多項式である．(26) で和は2樹木の補集合のうち S を含む T^{2*} のすべてについてとる．$G-S$ の2つの連結成分を H, H'，その U 関数を $U^{(H)}$, $U^{(H')}$ と書けば，(26) は

$$W_S = U^{(H)} U^{(H')} \prod_{l \in S} \alpha_l \tag{27}$$

とも書くことができる．たとえば 5·1 図について，V の切断集合表示 (25) は次のようになる．

$$\begin{aligned} V = \sum_{j=1}^{5} \alpha_j m_j^2 - U^{-1} [& \alpha_1 \alpha_4 (\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_5)(q_1 + q_4)^2 + \alpha_4 \alpha_2 \alpha_5 (q_4 + q_2 + q_5)^2 \\ & + \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 (q_1 - q_2 + q_3)^2 + \alpha_5 \alpha_3 (\alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_1)(q_5 + q_3)^2 \\ & + \alpha_1 \alpha_2 \alpha_5 (-q_1 + q_2 + q_5)^2 + \alpha_4 \alpha_2 \alpha_3 (q_4 + q_2 - q_3)^2] \end{aligned} \tag{28}$$

さて，(21) と (25) が一致することは，あとから証明する次の公式を使えばわかる．

$$\partial U / \partial \alpha_l = \sum_{C \ni l} U_C \tag{29}$$

$$\alpha_l \cdot U|_{\alpha_l=0} = \sum_{S \ni l} W_S \tag{30}$$

$$\sum_C \begin{bmatrix} C \\ l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ l' \end{bmatrix} \alpha_l \alpha_{l'} U_C = -\sum_S \begin{bmatrix} S \\ l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S \\ l' \end{bmatrix} W_S \qquad (l \neq l' \text{ のとき}) \tag{31}$$

実際，U は (4) から明らかなように各 α_l について線形であるから，

$$U = \frac{\partial U}{\partial \alpha_l} \alpha_l + U \Big|_{\alpha_l=0} \tag{32}$$

と書くことができる．これに $-\alpha_l/U$ を掛けて (29), (30) を代入すると，

$$-\alpha_l + U^{-1} \left(\sum_{C \ni l} U_C \right) \alpha_l^2 = -U^{-1} \sum_{S \ni l} W_S \tag{33}$$

を得る．(33) の左辺と右辺はそれぞれ (21) の q_l^2 の係数，(25) の q_l^2 の係数である．また (31) を U で割ったものは (21), (25) の $2q_l q_{l'}$ $(l \neq l')$ の係数にほかならない．

(29)～(31) の証明を簡単に述べておこう．これらは，両辺の各項がどういう内線集合によって規定されているかを調べれば確かめられる．そのためには，前に注意したように補集合に移って考えた方が便利である．(29) の両辺の各項の内線集合の補集合は，l を含まない樹木に l をつけ加えてできる擬樹木である．(30) では，l を含む樹木から l を除去してできる 2 樹木である．(31) では，l も l' も含まないがそのいずれをつけ加えても樹木になるような 2 樹木 T^2 である．符号は，$C \cap S = \{l, l'\}$ （なぜなら T^2 に含まれない C の内線は l と l' のみで，他方 $T^2 \cap S = \phi$ だから）と直交性 (24) から

$$\begin{bmatrix} S \\ l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S \\ l' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ l' \end{bmatrix} = 0 \tag{34}$$

であるので，これを $\begin{bmatrix} S \\ l \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} C \\ l' \end{bmatrix}^2 = 1$ なることを使って書き直せばよい．

(証明終)

5-2 g　外線運動量による V の式　以上では q は任意の運動量と考えたが，5-1 の (3) を満足している場合は (23) を用いると

$$\sum_l \begin{bmatrix} S \\ l \end{bmatrix} q_l = \sum_{a \in H} \sum_l \begin{bmatrix} a \\ l \end{bmatrix} q_l = -\sum_{a \in H} p_a \tag{35}$$

であるから*，切断集合表示 (25) の運動量の部分はすぐに p_a で書き表わせる．高次の Feynman 図では各頂点に外線が入っているわけではなく，少数の頂点にのみ外線が入っているのだから，S が異なっても (35) の値

* 中間状態の 4 次元運動量が初期状態(あるいは終状態)のそれと等しいということである．

は同じである場合がかなりあることになる．一般にGの外線の集合を2つの空でない部分集合に分けることを*チャンネルという(1-5 i 参照)．チャンネルをhで表わすと，hによって得られる一方の集合に属する外線の運動量の代数和としてチャンネルの4次元運動量 p_h が符号を除いて決まる(符号は p_h が空間的でなければその第0成分が正になるようにとる)．中間状態Sは外線の集合を2つに分けることになるから，どれかのチャンネルに属する．Sがチャンネルhに属すると，(35)から

$$\left(\sum_l \begin{bmatrix} S \\ l \end{bmatrix} q_l\right)^2 = p_h{}^2 \tag{36}$$

である．したがって，V の切断集合表示(25)は

$$V = \sum_l \alpha_l m_l{}^2 - U^{-1} \sum_h W_h p_h{}^2 \tag{37}$$

と書くことができる．ただし

$$W_h \equiv \sum_{S \in h} W_S \tag{38}$$

とする．

G の外線運動量を p_1, p_2, $\cdots$, p_r $(r \geqq 2)$ としよう．簡単のため全部外向きとする．保存則により $\sum_{j=1}^{r} p_j = 0$ である．チャンネルは $\{1, 2, \cdots, r\}$ を2つの空でない集合に分けることだから，その数は $2^{r-1}-1$ である．この数は，p_1, p_2, $\cdots$, p_r から作れる一次独立なスカラー積の数 $r(r-1)/2$ と比べると，$r=2, 3$ のときだけ等しく，$r \geqq 4$ では多い．p_h を p_j の和で書いて(37)に代入し，保存則を用いて整頓すると，

$$V = \sum_l \alpha_l m_l{}^2 + U^{-1} \sum_{1 \leq i < j \leq r} W_{ij} p_i p_j \tag{39}$$

となる．ここに W_{ij} は p_i の頂点と p_j の頂点をつながないような2樹木の補集合に対応する α_l の積の総和である．たとえば，5·1 図で外線運動量を $p_1 = -p_2 \equiv -p$ とすると

$$-W_{12} p_1 p_2 = [\alpha_1 \alpha_4 (\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_5) + \alpha_4 \alpha_2 \alpha_5 + \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_5 \alpha_3 (\alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_1)] p^2 \tag{40}$$

で，これは(28)の角括弧内で $q_1 = q_5 = p$, $q_2 = q_3 = q_4 = 0$ とおいたものに等しい．(39)を V の*頂点表示(vertex representation)という．

5-2 h Y_l と $X_{ll'}$ の位相公式 Y_l と $X_{ll'}$ の位相公式は，それらの定義 5-1 の(35)，(37)と，V の位相公式(21)あるいは(25)から直ちに得られる．すなわち，テンソル添字をつけて書くと

$$(Y_l)_\mu=(q_l)_\mu-U^{-1}\sum_C\begin{bmatrix}C\\l\end{bmatrix}U_C\sum_{l'}\begin{bmatrix}C\\l'\end{bmatrix}\alpha_{l'}(q_{l'})_\mu \tag{41}$$

$$(Y_l)_\mu=U^{-1}\sum_S\begin{bmatrix}S\\l\end{bmatrix}\alpha_l{}^{-1}W_S\sum_{l'}\begin{bmatrix}S\\l'\end{bmatrix}(q_{l'})_\mu \tag{42}$$

$$(X_{ll'})_{\mu\nu}=U^{-1}\sum_C\begin{bmatrix}C\\l\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C\\l'\end{bmatrix}U_C\cdot g_{\mu\nu} \tag{43}$$

$$(X_{ll'})_{\mu\nu}=-U^{-1}\sum_S\begin{bmatrix}S\\l\end{bmatrix}\begin{bmatrix}S\\l'\end{bmatrix}\alpha_l{}^{-1}\alpha_{l'}{}^{-1}W_S\cdot g_{\mu\nu} \tag{44}$$

注意すべきことは，(43) は $l=l'$ のときでも正しいが，(44) は $l\neq l'$ のときしか成立しないことである．これは 5-1 a で注意したように同じ l に対する D_l が 2 つ以上あるときは，それらを独立なものとみなしたときに正しい結果が得られるからである．したがって，(29) により

$$(X_{ll})_{\mu\nu}=U^{-1}\partial U/\partial\alpha_l\cdot g_{\mu\nu} \tag{45}$$

である．

たとえば，5·1 図について，(42) と (35) から

$$(Y_1)_\mu=U^{-1}[\alpha_4(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_5)+\alpha_2\alpha_3]p_\mu \tag{46}$$

$$(Y_2)_\mu=U^{-1}(\alpha_4\alpha_5-\alpha_1\alpha_3)p_\mu \tag{47}$$

$$(Y_3)_\mu=U^{-1}[\alpha_1\alpha_2+\alpha_5(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4)]p_\mu \tag{48}$$

であり，また (43) から

$$(X_{12})_{\mu\nu}=U^{-1}(\alpha_3+\alpha_5)g_{\mu\nu} \tag{49}$$

$$(X_{23})_{\mu\nu}=U^{-1}(\alpha_1+\alpha_4)g_{\mu\nu} \tag{50}$$

$$(X_{31})_{\mu\nu}=-U^{-1}\alpha_2 g_{\mu\nu} \tag{51}$$

である．

複雑な Feynman 積分を電子計算機で計算する場合は，(43) に現われる関数

$$B_{ll'}\equiv\sum_C\begin{bmatrix}C\\l\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C\\l'\end{bmatrix}U_C \tag{52}$$

をまず構成して，これをもとに計算をやるのが便利である．実際(41)から

$$Y_l=q_l-U^{-1}\sum_{l'}B_{ll'}\alpha_{l'}q_{l'} \tag{53}$$

であり，また

$$Q\equiv\sum_l\alpha_l m_l{}^2-V \tag{54}$$

が q について 2 次斉次であることと Y_l の定義式 5-1 の (35) により

$$Q=\frac{1}{2}\sum_l q_l\left(-\frac{\partial V}{\partial q_l}\right)=\sum_l\alpha_l q_l Y_l \tag{55}$$

と書けるからである．

なお位相公式を使っても Feynman パラメーター公式（5-1 の(44)参照）の分子の計算は大変であるので，この α の多項式を整理するプログラムが開発されている*．

5-2 i 電流回路網との類比 5-1 の(1)で Feynman 伝播関数を書くとき，$p_l=k_l+q_l$ のように2つの部分に分けたが，もちろんこの分け方は一意的ではない．$\{k_1, \cdots, k_\kappa\}$ が基底運動量ならば $k_j'=k_j+\tilde{q}_j$ $(j=1, \cdots, \kappa)$ のように常数運動量の分だけずらせると，対応する $q_l'\equiv p_l-k_l'$ は $k_l'\equiv\sum_j\begin{bmatrix}C_j\\l\end{bmatrix}k_j'$ により

$$q_l'=q_l-\sum_{j=1}^{\kappa}\begin{bmatrix}C_j\\l\end{bmatrix}\tilde{q}_j \tag{56}$$

となる．今，$\tilde{q}_j$ が α に依存することを許すならば

$$\sum_l\begin{bmatrix}C_j\\l\end{bmatrix}\alpha_l q_l'=\sum_l\begin{bmatrix}C_j\\l\end{bmatrix}\alpha_l q_l-\sum_{j=1}^{\kappa}\Big(\sum_{l\in C_j}\alpha_l\Big)\tilde{q}_j=0 \qquad (j=1, \cdots, \kappa) \tag{57}$$

となるように $\tilde{q}_j$ を選ぶことが一般に可能である．

$\{C_1, \cdots, C_\kappa\}$ は基本回路系であるから，(10)を用いると任意の回路 C に対し(57)から

$$\sum_l\begin{bmatrix}C\\l\end{bmatrix}\alpha_l q_l'=0 \tag{58}$$

となることがわかる．また q_l' は 5-1 の(3)の運動量保存則

$$\sum_l\begin{bmatrix}a\\l\end{bmatrix}q_l'+p_a=0 \tag{59}$$

を満足する．q_l' や p_a を電流，α_l を電気抵抗とみると，(59)，(58)はちょうど電流回路網における ♦Kirchhoff（キルヒホッフ）の第一法則と第二法則にほかならない．

(59)のうち独立なものはその任意の $n-1$ 個である．(58)のうち独立なのは(57)の κ 個である．独立な式は合計 $\kappa+n-1=N$ 個であり，これが N 個の未知ベクトル q_l' を決定する．実際この係数のつくる N 次の正方行列の行列式は U に等しいことが証明できるので，$\alpha>0$ なる限りつねに解が存在する．そしてその解は

$$q_l'=Y_l \tag{60}$$

---

* 人力でこの計算を遂行した最も複雑な例としては，フェルミオンの伝播関数6個を含む $\kappa=3$ の Feynman 積分がある．

によって与えられる．ただし Y_l は位相公式を用いて外線運動量 p_a で表わしてあるものとする．なぜなら，(41) の q_l が (58) を満たす q_l' に等しいとすると，第 2 項がおちて自動的に (60) が得られるからである．このようにして Y_l は Kirchhoff の 2 つの法則を満足する量であることがわかる．

なお証明は略すが，任意の q に対して関係式

$$\partial V/\partial\alpha_l = m_l^2 - Y_l^2 \tag{61}$$

が成立する．また V は α について 1 次斉次であるから，

$$V = \sum_l \alpha_l \partial V/\partial\alpha_l \tag{62}$$

である．それゆえ，(55) とよく似た関係式

$$Q = \sum_l \alpha_l Y_l^2 \tag{63}$$

が成立する．つまり Q は電流回路網の消費電力に相当する量であることがわかる．

5-2 j 縮約と位相公式 上述のように，α_l を電気抵抗と解釈すると，$\alpha_l=0$ とおくことは l を短絡(ショート)させること，すなわち縮約図 G/l を考えることであり，$\alpha_l=\infty$ とおくことは l を切断すること，すなわち $G-l$ を考えることになる．以下実際にそのように考えることが正しいことを示そう．

H を G の任意の連結な部分 Feynman 図とし，H の内線をことごとく短絡して得られる縮約図 $G/|H|$ を R と書く．そうすると

$$U = U^{(H)} U^{(R)} + U' \tag{64}$$

という公式が成立する．ここに $U^{(H)}$ は H の U 関数であるから，H の連結度を κ_H とすると κ_H 次斉次で，$U^{(R)}$ は R の U 関数であるから κ_R $(=\kappa-\kappa_H)$ 次斉次である．U' は H の内線の α_l に関し少なくとも κ_H+1 次の項の和である．したがって，U は $\sum_{l\in H}\alpha_l \to 0$ のとき κ_H 次のゼロをもつ．このことはくりこみ理論において基本的に重要である．

(64) の証明は次の通りである．G の任意の補樹木 T^* のうち H に含まれる内線の全体 $T^*\cap|H|$ は H の任意の回路と空でない共通部分をもつから，H の補樹木を含まねばならない．したがって，$T^*\cap|H|$ の内線の数は κ_H またはそれ以上である．それが κ_H をこえるような T^* に対応する U の項は，H の α_l について κ_H+1 次以上だから U' の中にはいる．ちょうど $T^*\cap|H|$ の内線の数が κ_H の場合，それは H の補樹木である．

このとき T^* の補集合 $T\equiv|G|-T^*$ を考えると，これは G の樹木であるから，$T\cap|R|$ は R において連結でかつすべての頂点を通る．またその内線の数は，R の頂点の数を n_R とするとき n_R-1 に等しい（なぜなら $|R|-T\cap|R|=T^*\cap|R|$ の内線の数が κ_R だから）から，$T\cap|R|$ は R において樹木の性質 3, 4, 7 を満たすゆえ R の樹木である．すなわち $T^*\cap|R|$ は R の補樹木である．ゆえに T^* に対応する U の項は (64) の第 1 項に含まれる．逆に H の任意の補樹木を $T_H{}^*$，R の任意の補樹木を $T_R{}^*$ とするとき，$T^*=T_H{}^*\cup T_R{}^*$ は G の任意の回路 C と共通要素をもち（なぜなら $C\subset|H|$ なら $C\cap T_H{}^*\neq\phi$，$C\not\subset|H|$ なら $C\cap T_R{}^*\neq\phi$ だから），かつ $\kappa_H+\kappa_R=\kappa$ 個の内線から成るから，G の補樹木である．したがって，(64) の第 1 項からくる任意の項は U に含まれる．（証明終）

なお，(64) は H が非連結な場合でも成りたつ．ただしこの場合の $U^{(H)}$ は H の各連結成分の U 関数の積である．このことは連結な場合の (64) をたんにくり返し使うだけで証明できる．

(64) の意味を理解するために特別の場合を考えてみよう．H がただ 1 つの内線 l をもつ場合は (64) は (32) に帰着する（ただし項の順序は逆になっている）．しかし例外的な場合として l が単独で回路を作っている場合には，$U^{(H)}=\alpha_l$ であり (32) の第 1 項が (64) の第 1 項となり，第 2 項は 0 となる．もう少し意味のある場合として $|H|$ が回路 C であるときは，(64) は

$$U=\Big(\sum_{l\in C}\alpha_l\Big)U_C+U' \tag{65}$$

となる．

(26) によって定義される W_S についても (64) と同様な式

$$W_S=U^{(H)}W_S{}^{(R)}+W_S{}' \tag{66}$$

が成立する．ただし $W_S{}^{(R)}$ は R における W_S 関数であるが，$|H|\cap S\neq\phi$ のときは S は R においては切断集合ではないので $W_S{}^{(R)}\equiv 0$ とする．$W_S{}'$ はもちろん H の内線の α_l に関し少なくとも κ_H+1 次の項の和である．

(64) と (66) を V の切断集合表示 (25) に代入すると，

$$V=V^{(R)}+V' \tag{67}$$

という重要な結果が得られる．ここに $V^{(R)}$ は R の V 関数で，V' は $\sum_{l\in H}\alpha_l\to+0$ のとき 0 になるような量である．すなわち (67) は，V の $\sum_{l\in H}\alpha_l=0$ における値を $V^{(R)}$ によって定義すれば，V が α について $\alpha\geqq 0$ での

連続関数になることを示す．Vがαに関して連続になることは決して些細なことではない．たとえば(46)〜(48)の例からわかるように，Y_l は一般に $l\in H$ のとき $\sum_{l'\in H}\alpha_{l'}\to+0$ で一定の極限値をもたない．したがって，(61)により $\partial V/\partial\alpha_l$ もそのとき一定の極限値をもたない．このことは電流回路網との類比によれば容易に理解される．つまりいくつかの電線を短絡させてもそのときの消費電力はきちんとした意味をもつが，短絡させてしまった電線を流れる電流というのは意味がない．またこの類比から想像できるように，Vの連続性は位相公式を用いないでも直接代数的に証明することもできる．

Hとしてとくに $G-l$ をとると，R はただ1つの内線 l をもつような Feynman 図になる．もし l が G の分離線でなければ，l は R では単独で回路をなしているはずだから，(67)からすべての $l'\neq l$ に対して $\alpha_{l'}=0$ とおくとき

$$V=\alpha_l m_l^2 \tag{68}$$

となることがわかる．(68)は G が少なくとも1つでも回路を含めば，V は外線運動量の値に無関係に，正の値（質量0の粒子があるときは0を含めて）をとることを示す．したがって，もしある外線運動量の値に対し $V<0$ となることがあったとすれば，V のαに関する連続性により外線運動量の同じ値に対し $V=0$ となるαが必ず存在することになる．このことから，一般に Feynman 積分 I は，$V<0$ になりうる外線運動量の値に対しては虚部をもつことがわかる*．真空偏極のように外線運動量のない場合は $V=\sum_l\alpha_l m_l^2\geqq0$ であるから，$\mathrm{Im}\,I=0$ である**．

終わりに，内線の切断に関して少し述べておこう．U で直接 $\alpha_l\to\infty$ としては意味がないので，W_S/U のような比について考えるべきである．そうすると，l が G の分離線でない限り

$$\lim_{\alpha_l\to\infty}\frac{W_S}{U}=\frac{\partial W_S/\partial\alpha_l}{\partial U/\partial\alpha_l} \tag{69}$$

であるから，α_l に関する微分を考察すればよいことがわかる．実際，位相公式を使うと次のことが直ちに証明できる．

$\partial U/\partial\alpha_l$ は l が G の分離線でない限り $G-l$ の U 関数に等しい．
$\partial W_S/\partial\alpha_l$ は l が $G-S$ の分離線でない限り $G-l$ の W_S 関数に等し

* 例外的にα積分の結果虚部の消失する場合もある（次節参照）．
** このことは 4-2 i において用いた．

い*. ただし $l \in S$ のときは $G-l$ では S から l を除去した集合が S の代りをする切断集合である. 上記の規則において除外した場合には, これらの微係数は恒等的に 0 に等しい.

5-3 Feynman 積分の解析性

Feynman 積分を外線運動量 p_a あるいはそれらのスカラー積の解析関数としてその解析性を研究することは, S 行列の一般的性質を明らかにするうえに極めて重要である. これには相補的な 2 つのアプローチがある. 1 つは与えられた Feynman 積分の特異点およびその性状を調べることである. もちろん Feynman 積分が複雑になると特異点の数も多くなってくるので, 一般の Feynman 積分を完全に解析することはほとんど不可能である. もう 1 つの攻め方は, 個々の Feynman 積分を調べる代りに, 1 つの理論に現われる Feynman 積分が共通して正則であるような領域を求めることである. この方法でははじめから完全な知識を得ることはあきらめているが, 実用的にはより有効で, 分散公式をはじめいろいろの積分表示が摂動論的に証明される. これらの成果について詳しく述べる余裕はないので, 本節では Feynman 積分の特異点に関する一般論だけを紹介する.

なお, Feynman 積分は 6-1 で述べるように多くの場合発散を含んでいる. これはくりこみを行なわなければ有限な値を与えない. それゆえ, 厳密にいえばくりこみをしていない Feynman 積分を論ずることは数学的に無意味であるという見解もありうる. しかしながら, 解析性のように変数に関して局所的な性質を論ずる場合には発散の困難はあまり本質的ではない. それゆえとくに発散のことを気にしないでも解析性に関して正しい結果を得ることができるのである.

5-3 a 解析関数の積分の特異点 本節では Feynman 積分を, チャンネル運動量の 2 乗 $s_h \equiv p_h{}^2$ を複素変数に拡張したときの解析関数として考察する. それゆえ, Feynman パラメーター公式での V に付随する $-i\varepsilon$ はおとしてしまう. $-i\varepsilon$ はあとから s_h の実軸上への適当な境界値という形で再現されるわけである (1-1 i 参照).

Feynman パラメーター公式 5-1 の (42) はデルタ関数を消去すると,

* (27) 参照.

$\Delta\equiv\{\alpha|\alpha\geqq0,\ \sum_l\alpha_l=1\}$ という有界な領域についての積分であるから，被積分関数の特異点からしか Feynman 積分の特異点は生じない．5-1 の (42) の被積分関数の特異点は $U=0$ の点と $V=0$ の点である．しかしながら，これらの点がすべて必ずしも Feynman 積分の特異点に対応するわけではない．それは被積分関数が解析関数だからである．このことをまず簡単な実例ではっきりさせておこう．

たとえば $P(x)$ を x の任意の多項式とするとき，

$$f(s)\equiv\int_{-1}^{+1}dx\,\frac{P(x)}{x-s} \tag{1}$$

を考えよう．分母は実軸上 $-1\leqq s\leqq+1$ で 0 になりうるが，実際 (1) の積分を遂行してみればわかるように，本当の特異点は両端の $s=\pm1$ のみである．このことは積分をやってみなくても次のようにして (1) から直接知ることができる．(1) の被積分関数は x の解析関数であるから，Cauchy の定理により積分路は実軸上でなくても，両端さえ -1 と $+1$ とに保っておけば分母の 0 をよぎらない限りいくらでも x の複素平面上で連続的に変形することができる．それゆえ，s が実軸上 $-1<s<+1$ にくるまえにあらかじめ α の積分路を実軸からずらせておけば分母は 0 にならない．したがって，s の特異点を生じない．ただ両端点 $x=\pm1$ のみは動かすことができないので，$s=\pm1$ が特異点として残るわけである．このように積分領域の端点に被積分関数の特異点が存在する場合，積分した関数の特異点を生ずるのは極めて一般的なことで，これを ♦端点特異性 (end-point singularity) と呼ぶ．

端点以外ではいつでも積分路を曲げて特異点をよけられるかというと，そうはいかない．たとえば

$$g(s)\equiv\int_{-1}^{+1}dx\,\frac{P(x)}{x^2-s} \tag{2}$$

を考えると，分母は $x=\pm\sqrt{s}$ で 0 になるから $s\to0$ では 2 つの極が実軸上で同じ点に一致してしまう．しかもこれは一方が上半面から他方が下半面からであるから，実軸上にあるもとの積分路は $s\to0$ のとき 2 つの極にはさまれて身動きがとれなくなる．こういう状況を ♦pinch という．pinch が起こるとその点で積分は特異点をもつ．実際 $g(s)$ は $s=0$ で $1/\sqrt{s}$ のような特異性を示す*(脚注は次頁)．一般に，pinch が起こるためには被積分関数の(少なくとも) 2 つの特異点が一致することが必要だから，

有理関数では分母の2重ゼロ点をさがせばよい．しかし，逆に2重ゼロ点が必ずしもpinchを与えるとは限らないので，話が少し厄介である．被積分関数を s が実数のとき実になる関数に限っても，たとえば*

$$\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{(x-s)(x-2s)}=\frac{1}{s}\log\frac{(1-2s)(1+s)}{(1+2s)(1-s)} \tag{3}$$

は2つの極が同方向から近づくのでpinchにならない．しかしこれは例外的な場合で，実際上分母の2重ゼロ点がpinchに対応しないことがよく起こるのは，そのときの値が x のもとの積分範囲の外にくる場合である．たとえば

$$\int_{+1}^{+2}\frac{dx}{x^2-s}=\frac{1}{2\sqrt{s}}\log\frac{(2-\sqrt{s})(1+\sqrt{s})}{(2+\sqrt{s})(1-\sqrt{s})} \tag{4}$$

は，$s=0$ で正則である．

これらの例でわかるように，分母の2重ゼロ点がpinchに対応しないことが起こるのは，もとの積分路との特別な位置関係のためである．したがって，特定のシートに話を限定せずに，Riemann 面上をどこまでも解析接続していけば積分路もそれにつれて変形されていくから，一般に分母の2重ゼロ点のある位置では特異点を生ずるはずである．実際 (3), (4) でも元のシート以外のシートでは $s=0$ で特異点をもつ．

以上は積分変数が1個の場合についてであったが，多重積分の場合には次のように拡張される．多重積分は1変数の積分のくり返しとみなせるから，各変数について特異点を生ずる条件が満足される場合にのみ，積分の特異点が生き残ることは容易に想像できるであろう．すなわち，多変数積分の場合は，積分変数のいくつか(1つもない場合や全部の場合も含む)について端点特異性，残りの変数についてはpinchとなる場合に特異点を生ずる．このことを数学的にきちんととり扱うには，♦homology 論** を用いるのが普通である．最近は ♦擬微分方程式 (pseudo-differential equa-

---

* $$\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{x^2-s}=\frac{1}{\sqrt{s}}\log\frac{1-\sqrt{s}}{1+\sqrt{s}}=-2\left(1+\frac{s}{3}+\frac{s^2}{5}+\cdots\right)$$

とやってはいけない．なぜなら $0\leqq s\leqq 1$ ではもとの積分は意味をもたないからである．実際 $s=u+i\varepsilon$ ($u>0$, $\varepsilon\to+0$) とおいて積分を正しく遂行してみると，対数は虚部 $i\pi$ をもつことがわかる．

** 多変数解析関数の Riemann 面は多次元の複雑な多様体であるから，これを厳密に考察するためには位相幾何学の homology の概念が必要になってくるのである．

tion) を用いる方法* も提起されている.

5-3 b Feynman 積分の特異点の決定 U は s_h を全く含まないから, U 単独では特異点を生ずることはない. V 単独で生ずる特異点を ♦Landau-Nakanishi (中西) 特異点あるいは ♦Landau 特異点という. U と V のゼロ点の協力によって生ずる特異点を ♦第2型特異点(second-type singularity) という. 積分範囲 Δ 内では $U \geqq 0$ であるから, Feynman 積分がもともと定義されているシート (♦物理的シート (physical sheet)** と呼ばれている) の上には現われることはないと考えられる. 第2型特異性の最も簡単な実例は, 4-5 で扱った2次の自己エネルギーの $s=0$ である. $s=0$ は物理的シートの上では特異点ではないが, 非物理的シートでは特異点になっている. しかし, 第2型特異点は実際上あまり重要でないので, これ以上立ち入らないことにする. 以下では Landau 特異点のみを考察する.

まず, 端点特異性の全くない場合を考えよう. この場合の特異点の位置は, V の2重ゼロ点によって決定される. α の間に拘束条件 $\sum_l \alpha_l = 1$ があるので, Lagrange の未定係数法を用いると***,

$$V=0 \tag{5}$$

$$\partial V/\partial \alpha_l = \lambda \qquad (\text{すべての } l \text{ につき}) \tag{6}$$

から λ を消去すればよいことがわかる. ところが V は1次斉次であるから,

$$0 = V = \sum_l \alpha_l \partial V/\partial \alpha_l = \sum_l \alpha_l \lambda = \lambda \tag{7}$$

となり, $\lambda=0$ を得る. したがって, (5), (6) は

$$\partial V/\partial \alpha_l = 0 \qquad (\text{すべての } l \text{ につき}) \tag{8}$$

---

* 線形偏微分方程式は微分演算子に関しては多項式であるが, これを適当な条件を満たす一般の関数形に拡張した線形方程式が擬微分方程式である. 線形方程式を十分たくさん連立させ, その解のはる空間が有限次元になるような系を極大過剰決定系というが, 極大過剰決定系は解の定義式とみることもできる. 一般の Feynman 積分の満足する擬微分方程式の極大過剰決定系を与えることが可能で, これにより Feynman 積分の解析性の問題が微分方程式論の問題に帰着させられる.

** 物理的シートは1変数の関数としたときは明確に定義できるが, 多変数の関数としてはかなりあいまいな概念である.

*** $N - \frac{1}{2}\nu\kappa \leqq 0$ のときにも使える公式は分母が V でなく $V + \alpha_0 \Lambda$ であるが, α_0 については端点特異性 $\alpha_0 = 0$ しかありえないから, 結局 V について考えればよいことになる.

となる．(8)により決定される特異点を♦主特異点(leading singularity)という．

G の部分 Feynman 図 H に属する内線の α_l が積分の端点になる場合，すなわちすべての $l \in H$ に対し $\alpha_l=0$ になるときは，$R \equiv G/|H|$ とすると 5-2 の(67)により V は $V^{(R)}$ に帰着する．したがって，$V^{(R)}$ に関して pinch を論ずればよい．この場合の特異点を♦従特異点(non-leading singularity)という．

一般論では G を特定の Feynman 図と限定していないから，R に相当する Feynman 図の場合をも含んでいるわけで，結局従特異点を改めて考える必要はないことがわかる．

5-3 c Landau 方程式 (8)を一般的に解くことはとてもできないが，もう少し見やすい形に書き直すことができる．5-2 の(61)により(8)は

$$m_l^2 - Y_l^2 = 0 \tag{9}$$

と書き直せる．ところが 5-2 i で示したように，Y_l は連立方程式

$$\sum_l \begin{bmatrix} a \\ l \end{bmatrix} q_l + p_a = 0 \tag{10}$$

$$\sum_l \begin{bmatrix} C \\ l \end{bmatrix} \alpha_l q_l = 0 \tag{11}$$

の解であったから，結局(10),(11)と

$$m_l^2 - q_l^2 = 0 \tag{12}$$

との解を求めればよいことがわかる．実際，(11)のもとで(8)が(12)になることは，V の回路表示 5-2 の(21)から直ちにわかる．連立方程式(10)～(12)を♦Landau 方程式という．

G の外線の入っている頂点の数を $r(\geqq 1)$ とすると，全体の保存則 $\sum_a p_a = 0$ のゆえに勝手に指定できる p_a の数は $r-1$ 個である．ただしそれが時空間の次元 ν を超えると一次独立ではなくなるから，一次独立なものの個数は

$$\mu \equiv \min(r-1, \nu) \tag{13}$$

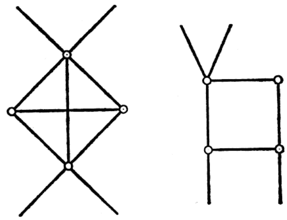
で与えられることになる．(10),(11)のようなベクトル方程式は，μ 個の独立成分をもつ方程式とみなせる．したがって，Landau 方程式全体の独立成分の数は，(10)が $\mu(n-1)$ 個，(11)が $\mu\kappa$ 個，(12)が N 個であるから，合計 $(\mu+1)N$ 個となる．これに対し未知数の方は，q の独立成分の数が μN 個，α は $\sum_l \alpha_l = 1$ があるために $N-1$ 個であるから，合計

$(\mu+1)N-1$ 個となる．不足の 1 個が特異点の位置を決定する．つまり特定のチャンネル h の運動量の 2 乗 s_h 以外は固定して考えると，s_h がある値 s_h^0 をとるときに Landau 方程式が満たされるわけである．

ところで，Landau 方程式のうち (10), (12) は Feynman パラメーター α を全く含まないことに注意しなければならない．これらの方程式の独立成分の総数は $\mu(n-1)+N$ で，含まれる未知数 q の独立成分の数が μN で s_h まで数えても $\mu N+1$ であるから，前者の数がこれを超えては困る．つまり

$$N \leqq \mu\kappa+1 \tag{14}$$

でないと Landau 方程式は解がない*．たとえば，5·3 図のような場合は，(14) を満足しないから主特異点は存在しない．(14) と (13) とを組み合せると，

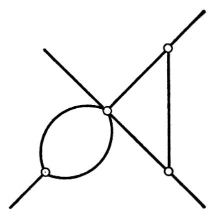


5·3 図

$$N \leqq \nu\kappa+1 \tag{15}$$

でなければ主特異点は存在しないことがわかる．

5·4 図のように，1 つの頂点で Feynman 図が少なくとも 1 つの内線を含む 2 つまたはそれ以上の連結部分に分けられるようなとき，♦分離可能 (separable) という．G が分離可能ならば主特異点は存在しない．なぜなら，分離の頂点で分けられる 2 つの部分にまたがるような回路は存在しないから，それらの Feynman パラメーターの相対比は Landau 方程式から決まらないので，Landau 方程式はその分だけ運動量の方に過重の条件を課しているはずだからである．



5·4 図

5-3 d　特異点の性状　特異点の性状はその位置を論ずるのと異なり，一般に被積分関数の分子にも依存しうるが，簡単のためスカラー粒子のみで微分結合のない場合だけを考える．

まず主特異点の場合を考えよう．Landau 方程式の解を $\alpha=\alpha^0$ (すなわち各 l につき $\alpha_l=\alpha_l^0$) とし，

$$\eta_l \equiv \alpha_l-\alpha_l^0 \tag{16}$$

$$\sum_l \eta_l=0 \tag{17}$$

*　外線運動量に 2 つ以上の条件を課した解は，多変数関数の特異点に対応しえないことが多変数解析関数論で知られている．

とおく．V に $\alpha=\alpha^0$ を代入し s_h を $s_h{}^0$ から Δs_h だけずらせたときの V の増分を ΔV と書くと（すなわち $\Delta V=\mathrm{const}(s_h-s_h{}^0)$），特異点の近傍では

$$V\simeq\Delta V+\frac{1}{2}\sum_{l,l'}a_{ll'}\eta_l\eta_{l'} \tag{18}$$

と近似できる．ただし

$$a_{ll'}\equiv\partial^2V/\partial\alpha_l\partial\alpha_{l'}|_{\alpha=\alpha^0} \tag{19}$$

とする．Landau 方程式はもちろんすべての α_l を一様に常数倍する変換に対して不変であるから，(18) の第 2 項は $\eta_l=\lambda\alpha_l{}^0$ $(\lambda\neq0)$ の場合 0 になるはずである．したがって，対称行列 $(a_{ll'})$ は固有値 0 をもつから

$$\det(a_{ll'})=0 \tag{20}$$

である．しかし，$\eta_l=\lambda\alpha_l{}^0$ は $\sum_l\eta_l=\lambda\neq0$ となって (17) と矛盾するから，許されない変位である．η_l の許される残りの $N-1$ 個の自由度に対応する $(a_{ll'})$ の $N-1$ 個の固有値は一般には 0 と異なるであろう．この中に 0 がある場合は少なくとも非常に例外的な場合* であるから以下では考えないことにすると，行列 $(a_{ll'})$ を対角化すれば (18) は

$$V\simeq\Delta V+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N-1}b_j\zeta_j{}^2\qquad\left(\prod_j b_j\neq0\right) \tag{21}$$

のように書き直せるであろう．ただし，ζ_j $(j=1,\cdots,N-1)$ は (17) を満たす η_l の一次結合である．そうすると，5-1 の (42) の特異点近傍の寄与 ΔI は

$$\Delta I=\mathrm{const}\int_{-\delta}^{+\delta}d\zeta_1\cdots\int_{-\delta}^{+\delta}d\zeta_{N-1}\frac{1}{\left(\Delta V+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N-1}b_j\zeta_j{}^2\right)^\rho} \tag{22}$$

のように書ける．ただし δ は十分小さい正数で，$\rho\equiv N-\frac{1}{2}\nu\kappa$ である．特異点の性状だけを問題にしているので，δ の値は正数である限り任意であるから，$\delta=1$ としても差し支えない．

ところで η を微小正数とするとき，初等積分計算により**

$$\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{(\eta+x^2)^k}\simeq\mathrm{const}\frac{1}{\eta^{k-1/2}}\qquad\left(k>\frac{1}{2}\text{ のとき}\right) \tag{23}$$

---

* 赤外発散はこの例外的な場合に相当する．

** (23) は $x=\sqrt{\eta}\tan\theta$ と変換すれば直ちに得られる．(24), (25) は $m=0$ の場合をまず計算すると，主要項はそれぞれ $-\log\eta$, $2\pi\sqrt{\eta}$ である．あとは両辺を η について 0 から η までくり返し積分すればよい．

$$\int_{-1}^{+1}dx(\eta+x^2)^{m-1/2}\simeq\text{const}\ \eta^m\log\eta \qquad (m=0,1,2,\cdots) \tag{24}$$

$$\int_{-1}^{+1}dx(\eta+x^2)^m\log(\eta+x^2)\simeq\text{const}\ \eta^{m+1/2} \qquad (m=0,1,2,\cdots) \tag{25}$$

であるから，(22) は

$$\begin{aligned}\varDelta I&\simeq\text{const}(\varDelta V)^\lambda\log\varDelta V &&(\lambda=0,1,2,\cdots)\\ &\simeq\text{const}(\varDelta V)^\lambda &&(\text{それ以外})\end{aligned} \tag{26}$$

のように振る舞うことがわかる．ここに

$$\lambda\equiv-\rho+\frac{1}{2}(N-1)=\frac{1}{2}(\nu\kappa-N-1) \tag{27}$$

である．

(15) を用いると

$$\lambda\geqq-1 \tag{28}$$

となるから，I が最も強い特異性を示す場合は単純極で，それ以外は対数的あるいは平方根的分岐点になっているわけである．

以上は主特異点の場合であった．従特異点のときは (18) の代りに特異点の近傍で

$$V\simeq\varDelta V+\frac{1}{2}\sum_{l,l'\in R}a_{ll'}\eta_l\eta_{l'}+\sum_{l''\in H}c_{l''}\alpha_{l''} \tag{29}$$

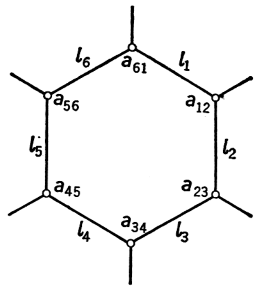
のようになる ($\alpha_{l''}\geqq0$, 無限小)．5-2 の (64) を考慮して $\alpha_{l''}$ に関する積分を遂行すると，V の指数 $N-\frac{1}{2}\nu\kappa$ が $N_R-\frac{1}{2}\nu\kappa_R$ になる (N_R, κ_R はそれぞれ R の内線の数と連結度)．したがって，従特異点の場合も (27) の κ と N をそれぞれ κ_R と N_R におきかえた式で λ を定義すれば，特異点の性状はやはり (26) で与えられる．

なおスカラー粒子以外を含む場合も本質的に同じ結果が得られるが，分子が特別の形をしていて I の特異性が弱まる (すなわち λ が (27) のものより大きくなる) ことがありうる．

5-3 e　discontinuity 公式　Landau 特異点は単純極の場合を除き一般に分岐点であるから，そのまわりを一周して元の位置に戻ってくると関数値は discontinuity を示す．Feynman 積分の特異点まわりの discontinuity を与える一般的規則として *Cutkosky (カットコスキー) 規則 (Cutkosky rule) と呼ばれるものがある．これは，縮約図 R に対応する特異点まわりの discontinuity は，運動量表示の Feynman 積分において R の内線に対応する Feynman 伝播関数の分母をそれぞれそのままデ

ルタ関数(2つの根のうち一方だけがきくようなデルタ関数)の $2\pi i$ 倍でおきかえて得られる積分によって与えられるというものである．この規則は，外線運動量がすべて実数ベクトルであるときは正しいことが homology 論を用いて示されているが，複素数ベクトルの場合はどういうふうに運動量積分を解釈すべきかはなはだ不明確である．この場合，Cutkosky 規則は結果がすでにわかっているのを簡明に再導出してみせるのには使えるが，はじめての計算をするときにそれを使うのは危険である．

5-3 f 単回路 Feynman 図 $\kappa=1$ の Feynman 図は，回路がただ1つであるので ♦単回路 Feynman 図と呼ぶ(5・5図参照)．単回路 Feynman 図では頂点の数 n と内線の数 N とが相等しい．内線は回路 C と同じ向きにそれに沿って順に $l_1, l_2, \cdots, l_n$ とし，l_j と l_{j+1} が接合している頂点を $a_{j,j+1}$ $(a_{n,n+1}\equiv a_{n1})$，その頂点に入っている外線の運動量を $p_{j,j+1}$ とする．もちろん $\sum_{j=1}^{n} p_{j,j+1}=0$ である．$p_{j,j+1}$ はいずれも0でないとする．このとき位相公式 5-2 の (4), (21), (37) から



5・5 図

$$U=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j \qquad (\text{積分領域}\ \Delta\ \text{では}\ U=1) \tag{30}$$

$$V=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j(m_j^2-q_j^2)+U^{-1}\Big(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j q_j\Big)^2 \tag{31}$$

$$V=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j m_j^2-U^{-1}\sum_{1\le j<k\le n}\alpha_j\alpha_k\Big(\sum_{i=j}^{k-1}p_{i,i+1}\Big)^2 \tag{32}$$

である．(30) を (32) に代入すると

$$UV=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha_j\alpha_k(m_j^2+m_k^2-s_{jk}) \tag{33}$$

となる．ただし

$$s_{jk}\equiv\Big(\sum_{i=j}^{k-1}p_{i,i+1}\Big)^2=\Big(\sum_{i=k}^{n}p_{i,i+1}+\sum_{i=1}^{j-1}p_{i,i+1}\Big)^2=s_{kj}, \qquad s_{jj}=0 \tag{34}$$

とする．

特異点においては $V=0$ なるゆえ

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_j}(UV)=U\frac{\partial V}{\partial\alpha_j}=0 \tag{35}$$

であるから，$U\neq0$ なる限り，(8) は

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j(m_j^2+m_k^2-s_{jk})=0 \qquad (k=1,\cdots,n) \tag{36}$$

となる．これから α_j を消去すれば，特異点の方程式として

$$\det(m_j^2+m_k^2-s_{jk})=0 \tag{37}$$

を得る．この式は直接 (20) からも得られる．

(15) からわかるように，$n=N>\nu+1$ のとき主特異点は存在しない．また (26), (27) から $n=N=\nu+1$ のとき主特異点は単純極である．実際この場合，I は (37) の左辺の式を分母にもつ関数であることを示すことができる．$2\leqq n=N\leqq\nu$ においては主特異点は分岐点である．

従特異点については，単回路 Feynman 図の縮約図はまた単回路 Feynman 図であることから，改めて調べる必要はない．

5-4 しきい値

前節では Feynman 積分で定義される解析関数の特異点を一般的に考察したが，実用上必要なのは解析関数の全容ではなく，カットの入った物理的シートの上での解析性である．本節では，この場合における特異点とくにしきい値について述べる．

5-4 a　しきい値の定義　Feynman パラメーター公式において Feynman パラメーターを $\alpha\geqq0$ に保ち，かつ一次独立なチャンネル運動量の 2 乗のうちの 1 つ s_h だけを除き他をすべて実数値に固定して，Feynman 積分を s_h だけの 1 変数の複素関数として考察する．このときもちろん Feynman 積分は s_h が実のときのみ特異点をもちうるので，この場合の特異点を*実特異点 (real singularity) という．

注意しなければならないのは，s_h を全く自由には選べないことである．特異点を与える $\alpha_l=0$ $(l\in H)$, $\alpha_l=\alpha_l^0$ $(l\in R)$ に対して s_h の係数が 0 になってしまっては，s_h の複素数値からの境界値として 5-1 の (42) を再現することができない．通常，特異点を与える α の値 α^0 に対して係数が負になるような s_h を選ぶ．V の切断集合表示 5-2 の (37) からわかるように，係数が正になるような s_h は一般には存在しないが，負になるものはつねに存在する．このとき 5-1 の (42) は s_h の上半面からの境界値として表わされる．

実特異点近傍の V の値を 5-3 の (29) のように書くと，

$$\Delta V=-b(s_h-s_h{}^0) \qquad (b>0) \tag{1}$$

で，$a_{ll'}$, $c_{l''}$ は実数となる．行列 $(a_{ll'})$ の固有値がすべて正または 0 (0 は通常 1 個だけ) のとき特異点 $s_h=s_h{}^0$ をチャンネル h の ♦閾(いき)値あるいは ♦しきい値(threshold)という．すなわち $\alpha_l=\alpha_l{}^0$ $(l\in R)$ の近傍で

$$V^{(R)}\geqq 0 \qquad (s_h=s_h{}^0\text{ のとき}) \tag{2}$$

となるような実特異点である．このとき 5-2 の (29) と (1) からわかるように，$V^{(R)}$ が $s_h<s_h{}^0$ では (少なくとも $\alpha=\alpha^0$ の近傍で) 正定値で，$s_h>s_h{}^0$ では負の値をもとりうるから，Feynman 積分 I の虚部 $\mathrm{Im}\,I$ に，$s_h>s_h{}^0$ では $s_h<s_h{}^0$ にはなかった新しい寄与がつけ加わるような点であるといえる．

5-4 b Euclidean 運動量 一般に運動量の組 $\{p_1, \cdots, p_m\}$ が任意の実数 $c_1, \cdots, c_m$ に対しつねに

$$(c_1p_1+\cdots+c_mp_m)^2\geqq 0 \tag{3}$$

を満たすとき，それを ♦Euclidean であるという．もし p_j が実数ベクトルならば，(3) からすぐ証明できるように，p_j がすべて平行な時間的 (例外的に光錐的) ベクトルの場合にのみ Euclidean である．実数ベクトルでなければ，p_j のすべての空間成分が純虚数で時間成分が実数のときはつねに (3) を満足する．

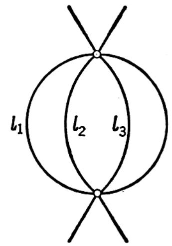
R のチャンネル運動量の全体が Euclidean ならば，もちろん R の内線運動量 q_l 全体も Euclidean とすることができる．さらに q が Landau 方程式 5-3 の (12) を満足するとき，$V^{(R)}$ の回路表示により α の任意の値に対し (2) が成立することがわかる．ゆえに

［定理］ 縮約図 R のチャンネル運動量が Euclidean な実特異点は，つねにしきい値を与える．

この定理の逆は一般には真でないが，単回路 Feynman 図では逆も成立する．すなわち，単回路 Feynman 図 R のしきい値は Euclidean なところでのみ可能である．なぜなら，$\eta\equiv\alpha-\alpha^0$ とおくとき，5-3 の (31) により Landau 方程式を満たす q に対して V_R が $\left(\sum_l\begin{bmatrix}C\\l\end{bmatrix}\eta_l q_l\right)^2$ に比例するからである．

5-4 c 常しきい値 r を縮約図 R において外線の入っている頂点の数としよう．$r=0, 1$ の場合はチャンネル運動量がないから，対応する特異点は存在しない (5-3 の (13) 参照)．したがって，特異点が存在するためには少なくとも $r=2$ であることが必要である．$r=2$ のときは 5-3 の (13),

(14) から明らかなように，$|R|$ がもとの Feynman 図 G において切断集合，もっと正確にいえば中間状態 S になっている場合のみ特異点が存在する (5·6 図参照). $S\equiv|R|$ がチャンネル h に属する中間状態であるとき，$p_h=p_h{}^0$ は時間的ベクトルになるので上述の定理によりつねにチャンネル h のしきい値を与える. これを*常しきい値(normal threshold)という.



5·6 図

常しきい値に対する Landau 方程式は，チャンネル運動量 p_h の向きを S の向きに合わせてとれば，

$$\sum_{l\in S}\begin{bmatrix}S\\l\end{bmatrix}q_l=p_h \tag{4}$$

$$\begin{bmatrix}S\\l\end{bmatrix}\alpha_l q_l=\begin{bmatrix}S\\l'\end{bmatrix}\alpha_{l'}q_{l'}\qquad (l,\ l'\in S) \tag{5}$$

$$q_l{}^2=m_l{}^2\qquad (l\in S) \tag{6}$$

となる. ただし，(5) では回路 $C\equiv\{l,\ l'\}$ の回路指標と S の切断集合指標との間の直交性

$$\begin{bmatrix}S\\l\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C\\l\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}S\\l'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C\\l'\end{bmatrix}=0 \tag{7}$$

を用いた. (4)〜(6) の解 $\alpha=\alpha^0$, $q=q^0$, $p_h=p_h{}^0$ は

$$\alpha_l{}^0\equiv m_l{}^{-1}/\sum_{l'\in S}m_{l'}{}^{-1}\qquad (l\in S) \tag{8}$$

$$q_l{}^0\equiv\begin{bmatrix}S\\l\end{bmatrix}m_l(\sum_{l'\in S}m_{l'})^{-1}p_h{}^0\qquad (l\in S) \tag{9}$$

$$s_h{}^0\equiv(p_h{}^0)^2\equiv(\sum_{l\in S}m_l)^2>0 \tag{10}$$

で与えられる. また

$$b=W_S{}^{(R)}/U^{(R)}|_{\alpha=\alpha^0}=(\sum_{l\in S}m_l\cdot\sum_{l'\in S}m_{l'}{}^{-1})^{-1}>0 \tag{11}$$

である.

常しきい値における特異点の性状は，4 次元の場合 ($\nu=4$), S の内線の数を N_S とするとき，5-3 の (26), (27) により次のようになる.

$N_S=1$ のとき：　単純極 $[\mathrm{const}/(s_h{}^0-s_h)]$

$N_S=2,\ 4,\ 6,\ \cdots$ のとき：平方根的分岐点 $[\mathrm{const}(s_h{}^0-s_h)^{(3N_S-5)/2}]$

$N_S=3,\ 5,\ \cdots$ のとき：　対数的分岐点

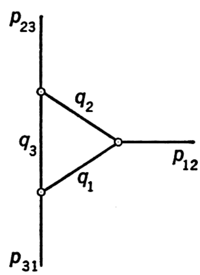
$$[\mathrm{const}(s_h{}^0-s_h)^{(3N_S-5)/2}\log(s_h{}^0-s_h)]$$

5-4 d unitary 性との関係 常しきい値の存在はS行列の unitary 性 4-1 の (36) と密接に関連している．Feynman 積分Iは$s_h > s_h^0$において虚部に新しい寄与を獲得するわけであるが，これはこの常しきい値から出ているカットの discontinuity の 1/2 にほかならない(1-1 の(12)参照)．ところで 4-1 の(36)は，1つの Feynman 積分に対して適用すると*，Feynman 積分の discontinuity をより低次の Feynman 積分によって表わす式と解釈することができる (Cutkosky 規則はこれの拡張にほかならない)．(10)により$\sqrt{s_h^0}$は中間状態Sに属する粒子の質量の総和に等しいから，Sを終状態$|c_S\rangle$とする反応が$s_h > s_h^0$においてエネルギー的に可能となる．それゆえ，4-1 の (36) の右辺でその$|c_S\rangle$からの寄与が$|c\rangle$についての和に新しくつけ加わるわけである．このように常しきい値は新しく可能な反応が開けるエネルギー値という明確な物理的意味をもつ．これがしきい値という言葉の語源である．

unitary 性を使うと，Feynman 積分の虚部 Im Iの計算が著しく簡単になる場合がある．しかし，同じチャンネルに中間状態が2つ以上ある場合は，discontinuity 自身がまた discontinuity をもちうるから，とり扱いは注意を要する．

5-4 e 異常しきい値 常しきい値以外のしきい値を *異常しきい値 (anomalous threshold) という．異常しきい値では$r \geqq 3$である．さらにRが分離可能でないためには，$|R|$がGの相異なるチャンネルに属する中間状態を少なくとも3つ含まねばならない．したがって，異常しきい値はつねに3つ以上のチャンネルに関係することになり，そのどのチャンネルの運動量の2乗を変数s_hに採用することも可能である．

異常しきい値の最も簡単な例は，Rが5·7図のような3角形の Feynman 図になる場合である．



5·7 図

単回路 Feynman 図では，しきい値はチャンネル運動量が Euclidean であるときのみ可能だから，Landau 方程式 5-3 の (10), (12) により，3角不

* 考えている Feynman 積分Iの Feynman 図の各線をすべて相異なる粒子に対応させるような場の数を水増しした理論を仮想的に導入して，形式的にIがその理論の最低次の摂動項に一致するようにすると，そのオーダーで 4-1 の (36) の左辺がIただ1項に対するものとなる．

等式*

$$(m_j-m_k)^2<s_{jk}<(m_j+m_k)^2 \qquad (j\neq k) \tag{12}$$

を満たさなければならない．(12)は5·7図に現われる粒子が自然に崩壊しない，すなわちエネルギー的に安定であるための条件にほかならない．(12)が満たされているとき

$$\cos\theta_{jk}\equiv\frac{m_j{}^2+m_k{}^2-s_{jk}}{2m_jm_k} \tag{13}$$

とおくと，θ_{jk} が $0<\theta_{jk}<\pi$ の範囲の実数となるので便利である．

特異点の位置は 5-3 の(37)の $n=3$ の場合から求められる．実際，(13)を代入すると，

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\theta_{12} & \cos\theta_{31} \\ \cos\theta_{12} & 1 & \cos\theta_{23} \\ \cos\theta_{31} & \cos\theta_{23} & 1 \end{vmatrix}=0 \tag{14}$$

となる．これをたとえば $\cos\theta_{12}$ について解くと，簡単な計算で

$$\cos\theta_{12}=\cos(\theta_{23}\pm\theta_{31}) \tag{15}$$

を得る．すぐあとで示すように，(15)の複号のプラスをとる方の解が実特異点に対応し，他方は物理的シートの上にない．さらにまた

$$\theta_{23}+\theta_{31}>\pi \tag{16}$$

が示されるので，異常しきい値は

$$\theta_{12}+\theta_{23}+\theta_{31}=2\pi \tag{17}$$

に対応する s_{12} の値である．

さて，実特異点であるための条件は比 $\alpha_1:\alpha_2:\alpha_3$ が正であることである．$n=3$ の場合の 5-3 の (36) の $k=1, 2$ の式から，

$$\alpha_1:\alpha_2:\alpha_3=m_2m_3A_1:m_1m_3A_2:m_1m_2A_3 \tag{18}$$

である．ただし

$$A_1\equiv\cos\theta_{12}\cos\theta_{23}-\cos\theta_{31} \tag{19}$$

$$A_2\equiv\cos\theta_{12}\cos\theta_{31}-\cos\theta_{23} \tag{20}$$

$$A_3\equiv1-\cos^2\theta_{12} \tag{21}$$

とおいた．(21)から $A_3>0$ であるから，$A_1>0$, $A_2>0$ でなければならない．$A_1+A_2>0$ を書き直せば

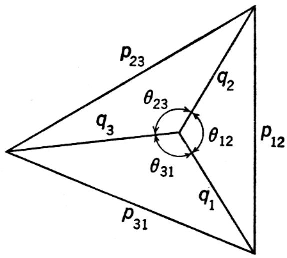
* (12) で不等号の代りに等号が成立する場合，たとえば $s_{12}=(m_1\pm m_2)^2$ のときは，あとの (18), (21) からわかるように，$\alpha_3=0$ となって 5·7 図はさらに縮約される．

$$\cos\theta_{23}+\cos\theta_{31}<0 \tag{22}$$

となるが，これから (16) が導かれる．

(15) の複号でマイナスの方をとった場合，$\theta_{31}=\theta_{23}-\theta_{12}$ あるいは $\theta_{23}=\theta_{31}-\theta_{12}$ となるから，(19) あるいは (20) に代入すると，$\sin\theta_{jk}>0$ により $A_1<0$ あるいは $A_2<0$ を得て，条件に反することがわかる．これに対し，(15) の複号でプラスをとった場合すなわち (17) の場合は，つねに $A_1>0$, $A_2>0$ となるから実特異点の条件を満足する．したがって，(22) あるいは (16) は異常しきい値存在の必要条件であるのみならず，(12) のもとで十分条件でもあることになる．

異常しきい値は次のような幾何学的な方法で求めることもできる．いまの例の場合 p_{jk}, q_j はすべて Euclid 平面上のベクトルとみなせるので，Landau 方程式 5-3 の (10), (11) により幾何図形 5·8 図が描ける．5-3 の (12) は q_j の長さを m_j とすることを意味するから，p_{23}, p_{31} の長さ $\sqrt{s_{23}}$, $\sqrt{s_{31}}$ が与えられれば，5·8 図により p_{12} の長さすなわち $\sqrt{s_{12}}$ が決定される．



5·8 図

5·8 図のような図を一般に ♦双対図 (dual graph) といい，Feynman 図が平面上に線のクロスなしに描ける場合はつねに双対図が作れて，幾何学的解法が使えることが知られている．

5-4 f　スペクトル表示　簡単のため 4 次元 ($\nu=4$) とすると，5·7 図に対応する Feynman 積分 I は，5-1 の (42) と 5-3 の (30), (32) から

$$I(s)=\frac{1}{(4\pi)^2}\int_0^\infty d\alpha_1\int_0^\infty d\alpha_2\int_0^\infty d\alpha_3\frac{\delta(1-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)}{\gamma-\alpha_1\alpha_2 s-i\varepsilon} \tag{23}$$

である．ただし

$$\gamma\equiv\left(\sum_{k=1}^{3}\alpha_k\right)\sum_{j=1}^{3}\alpha_j m_j{}^2-\alpha_2\alpha_3 s_{23}-\alpha_3\alpha_1 s_{31} \tag{24}$$

で，I を $s\equiv s_{12}$ の関数とみて $I(s)$ と書いた．

s_{23} と s_{31} がそれぞれの常しきい値より小さい値のとき，すなわち

$$s_{23}<(m_2+m_3)^2,\qquad s_{31}<(m_3+m_1)^2 \tag{25}$$

のとき

$$\gamma\geqq(\alpha_1 m_1+\alpha_2 m_2-\alpha_3 m_3)^2+\alpha_1\alpha_2(m_1-m_2)^2\geqq 0 \tag{26}$$

であるから，(23) の積分内に

$$1=\int_0^\infty ds'\delta(s'-\gamma/\alpha_1\alpha_2) \tag{27}$$

を導入して，積分順序を交換すると

$$I(s)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty ds'\frac{\mathrm{Im}\,I(s')}{s'-s-i\varepsilon} \tag{28}$$

というスペクトル表示を得る．ここに

$$\frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\,I(s')$$
$$=\frac{1}{(4\pi)^2}\int_0^\infty d\alpha_1\int_0^\infty d\alpha_2\int_0^\infty d\alpha_3\,\delta(1-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)\delta(\alpha_1\alpha_2 s'-\gamma) \tag{29}$$

である．

(28) の積分の実際の下限 a は 0 よりも大きい．もちろんその値は (29) を計算すればわかるが，この計算を具体的に遂行しないでも a の値を知ることができる．というのは a は虚部が出はじめる s の値すなわち最低のしきい値にほかならないからである．このチャンネルのしきい値は，常しきい値 $s=(m_1+m_2)^2$ はつねに存在するが，異常しきい値 $s=s^0$ は

$$s_{23}>(m_2-m_3)^2, \qquad s_{31}>(m_3-m_1)^2 \tag{30}$$

と，(22) すなわち

$$m_1(m_2{}^2+m_3{}^2-s_{23})+m_2(m_3{}^2+m_1{}^2-s_{31})<0 \tag{31}$$

とが満たされているときのみ存在し，存在するときは必ず常しきい値よりも低い．ゆえに，通常の場合は $a=(m_1+m_2)^2$ であるが，(30), (31) が同時に満たされるときは $a=s^0$ になる．

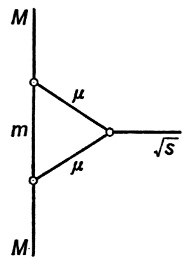
簡単のため

$$s_{23}=s_{31}\equiv M^2, \qquad m_1=m_2\equiv\mu, \qquad m_3\equiv m \tag{32}$$

の場合を考えよう (5･9 図参照)．このとき (30), (31) はそれぞれ

$$|m-\mu|<M \tag{33}$$

$$m^2+\mu^2<M^2 \tag{34}$$



5･9 図

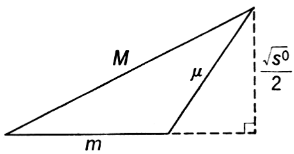
となり，異常しきい値 $s=s^0$ は，(15) のプラス符号の式から

$$s^0=[(m+\mu)^2-M^2][M^2-(m-\mu)^2]/m^2 \tag{35}$$

となる．すなわち，M, m, μ が 5･10 図のような鈍角 3 角形をつくる場合のみ異常しきい値が存在し，その値は m を底辺としたときのその 3 角形の高さの 2 倍の 2 乗である．5･10 図は双対図 5･8 図の半分を描いたものに

ほかならない．

(34)から異常しきい値が起こるのは，外線の粒子がそれよりも大分質量の小さい 2 粒子に（エネルギーが不足だから現実には崩壊しないが）解離しうるような場合であることがわかる．つまり外線の粒子は複合粒子に近いといえる．実際たとえば M として重陽子の質量，μ と m としてそれぞれ陽子および中性子の質量をとると，(35) から s^0 は重陽子の結合エネルギーに比例することが知られる．さらに $s\equiv-\boldsymbol{p}^2$ とおいて (28) の 3 次元 Fourier 変換をとると，その空間遠方での振る舞いは重陽子の非相対論的束縛状態の波動関数の絶対値の 2 乗のそれと ($m+\mu-M$ や $m-\mu$ を m に比べて無視する近似で) 一致することが示される．つまり異常しきい値は複合粒子の空間的広がりと密接に関係するものである．

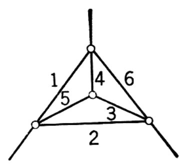


5·10 図

演習問題 5.

5.1　5-1 の (43) を用いて，Feynman パラメーター公式 (42) を $N-\frac{1}{2}\nu\kappa\leqq 0$ のときにも使える形に拡張せよ．

5.2　5·11 図に対する U の位相公式を具体的に書け．



5·11 図

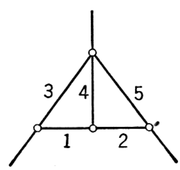
5.3　5·12 図に対する V の回路表示および切断集合表示の位相公式を具体的に書き，両者が相等しいことを直接確かめよ．

5.4　電子の 4 次の自己エネルギー（2 次のくり返しでないもの）の Feynman 積分の Feynman パラメーター公式を位相公式を用いて具体的に書き下せ*．ただし $\nu=4$ とする．

5.5　α が領域 $\varDelta=\{\alpha\,|\,\alpha\geqq 0,\ \sum_l \alpha_l=1\}$ に属するとき

$$U\leqq N!/\kappa!(N-\kappa)!N^{\kappa}$$

であることを証明せよ．



5·12 図

5.6　$\nu=2$, $0<V\leqq V_0$ (V_0 は常数) と仮定して，5-1 の (42) の Feynman 積分 I の大きさを下からおさえよ．ただし前問の結果と 4-6 の (37) を利用する．

5.7　4-2 の (26) の相互作用 Lagrangian 密度をもつ 2 次元スカラー場理論

---

*　一般に与えられた Feynman 図の Feynman 積分が Feynman パラメーター公式の形で直接書き下せるように，Feynman 規則を拡張することを自分でやってみるのが望ましい．

で，n 次の Feynman 図の数は n が極めて大きいときおおよそ漸近的に $n^{(m-2)n/2}$ のように極めて急速に増大することが知られている．前問の結果を利用して，$m\geqq 3$ のとき結合常数が 0 でない限りつねに摂動級数は発散することを示せ．ただし，V_0 が n に無関係にとれることは証明されているとする．

5.8 4–5 の(1)の Feynman 積分 $F(s)$ の discontinuity は，S 行列の unitary 性を用いると

$$\frac{1}{2\pi}\underset{s=p^2}{\mathrm{disc}}\,F(s)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^4k\,\theta(p_0-k_0)\delta(\mu_1{}^2-(p-k)^2)\theta(k_0)\delta(\mu_2{}^2-k^2)$$

と書けるはずである．この積分を計算し 4–5 の (14) と一致することを確かめよ．

5.9 核子が 3 つの等質量の quark から成り，かつ quark が場の量子論でとり扱えるものと仮定する．このとき核子に対する 3 角形の Feynman 図から異常しきい値がでないためには，quark の質量は核子の質量の何倍よりも大きくなくてはならないか．ただし，核子は 1 個の quark と 2 個の quark とに解離するものと考えよ．

6. くりこみ理論

6-1 紫外発散

Feynman 積分は一般にいくつかの発散を含む．このうち赤外発散は，すでに 4-6 で述べたように，質量 0 の粒子が存在するときのみ起こりうるもので，量子電磁力学においては遷移確率で自動的に消失する．Feynman 積分はまた外線運動量のある特定の値で無限大になることがあるが(5-3 d 参照)，これは Feynman 積分で定義される解析関数が特異点をもつことにほかならず，理論的困難ではない．Feynman 積分のもつ本質的な困難は，内線の運動量が非常に大きいところから生ずる発散である．これは，*紫外異変 (ultraviolet catastrophe) あるいは *紫外発散 (ultraviolet divergence) と呼ばれている．その簡単な例はすでに 4-5 の自己エネルギーの計算で現われている．これらの例でもわかるように，紫外発散は外線運動量に無関係な常数の形で現われているので，形式的引き算により除去することができる．これがくりこみの考え方である．

本節ではまず直観的に紫外発散の一般的判定法を述べ，ついでその厳密な証明を与える．

6-1 a　直観的考察　Feynman 積分は Feynman 伝播関数の積の多重積分である．積分変数 k_l は Minkowski 空間のベクトルであるが，4-5 a でやったように Cauchy の定理を用いてその第 0 成分を虚軸までまわすことができれば，Euclid ベクトルに直すことができる*．Euclid 化されれば，k_l が十分大きいところからの寄与が収束するか発散するかを判定するのは，被積分関数の $|k_l|\to\infty$ の漸近的振る舞いを調べればわかる．今

* この場合の Euclid ベクトルは 5-4 b で定義した Euclidean の概念とは内積の符号が異なるから，混同しないようにしなければならない．

の場合，被積分関数は有理関数だから，その分母の次数と分子の次数の差が積分の数を超えていれば収束，そうでなければ特別な相殺の起こらない限り発散と考えられる．もう少し具体的にいうと，Feynman 図 G においてボソンの内線の数を N_B，フェルミオンの内線の数を N_F，微分結合の数を n_D，連結度を κ とし，

$$d \equiv \nu\kappa - 2N_B - N_F + n_D \tag{1}$$

とおけば，$d<0$ なら収束，$d \geqq 0$ なら発散と予想される．ただし ν は時空間の次元数で，本来の Minkowski 空間では $\nu=4$ である．d のことを G に対応する Feynman 積分 I の ♦見かけの発散の次数 (superficial degree of divergence) という*.

上の考察だけでは明らかに不十分である．というのは，一次独立ないくつかの k_l が必ずしも同時に無限大にいくわけではないからである．すなわち，I が全体としては $d<0$ であってもその内部の積分ですでに発散を含んでいるかもしれないからである．したがって，(1) に相当する量を，G の任意の部分 Feynman 図 H (ただし $|H| \neq \phi$) について定義しそれを d_H と書くとき，すべての H について $d_H<0$ ならば収束，1 つでも $d_H \geqq 0$ のものがあれば特殊な事情のない限り発散であると考えられる．ここで d_H の定義から明らかなように，H としては H の内線の全体 $|H|$ がいくつかの回路の合併になっているような連結な部分 Feynman 図のみを考えれば十分である．

6-1 b　証明における問題点　上の判定法はあくまでも予想であって，もっとかくれた所から予測外の発散が現われるかもしれないから，きちんとした証明を与えることが必要である．ところがそれを厳密にやろうとすると k_l を Euclid 化する方法はなかなかうまくいかない．$\kappa=1$ の場合だけは問題ないが，$\kappa \geqq 2$ の場合は 1 つの k_l を Euclid 化すると，他の 4 次元運動量との積の項の存在ゆえに分母が一般に複素量になってしまい，2 つ目からは Euclid 化がうまくいかないのである．すべての k_l の第 0 成分 $(k_l)_0$ を同時に虚軸までまわすという考えが多くの人によって出されているが，これは Cauchy の定理の誤用であって数学的に正当化できない．$(k_l)_0 = r(k_l')_0$ のように変数変換して r についてその積分路を虚軸にまわ

---

* 実際の発散の次数は d よりも低くなることがしばしば起こる．たとえば d が奇数のときは必ず(少なくとも) 1 次だけ発散の次数が下がる．なお 0 次の発散とは対数発散のことを指す．

す方法も考えられるが，運動量表示の Feynman 積分のように決して絶対収束しえない積分についてこのような非線形変換をすることは妥当でない．また以上いずれの考え方でも，4·15 図の 2 つの四分円積分路の部分からの寄与が無視できるという保証が全くないから，証明が完結しえない．

この困難を回避する方法は，Feynman パラメーター公式に移って考えることである．Feynman 伝播関数を 5-1 の (14) を用いてパラメーター表示すると，k_l の絶対値の大きいところは，α_l が非常に小さくない限り被積分関数の振動が大きく，α_l 積分にはほとんどきかないと考えられる．すなわち $k_l \to \infty$ での振る舞いは $\alpha_l \to 0$ の振る舞いに対応すると考えられる．実際，Feynman パラメーター公式は U を分母にもち，5-2 の (64) に見られるように U は $\sum_{l\in H}\alpha_l \to 0$ のとき κ_H 次のゼロをもつから，ここから発散が生ずる可能性がある．注意すべきことは，5-1 の (33) からわかるのだが，V は全く紫外発散に関与しないことである．したがって，k_l が Minkowski 空間のベクトルであっても Euclid ベクトルであっても紫外発散が起こるか起こらないかには変わりがないはずである．このことを使えば最初に考えた Euclid 的考察による証明が可能と予想される．これは実際可能であるが，この方法は論理的にも実際的にも複雑である．それよりももっと明快なのは Feynman パラメーター公式で直接証明することである．

6-1 c 次数勘定定理 Feynman 積分の収束が次数を勘定するだけでわかるという定理を*次数勘定定理 (power-counting theorem) という．この定理をまず Feynman パラメーター公式の言葉で正確に述べておこう．

考える積分は 5-1 の (33) に D の多項式 $F(D)$ を作用させて得られるものである．紫外発散は，$\min_l \varepsilon_l$ を無限小でなく有限の正数と考えて起こる発散として定義される．なぜなら，k_l の無限に大きいところの振る舞いは，ε_l の有限の変化により変わるはずがないからである．また外線運動量はすべて実数値に固定されているものとする．

［次数勘定定理］ Feynman 図 G に対応する Feynman 積分の Feynman パラメーター公式は，$|H|$ ($\neq \phi$) が G の回路の合併であるような任意の部分 Feynman 図 H に対してつねに

$$d_H \equiv \nu\kappa_H - 2N_H + f_H < 0 \tag{2}$$

が成立するならば，$\varepsilon_l>0$ をすべて固定するとき絶対収束する．ただし κ_H, N_H, f_H はそれぞれ H の連結度，H の内線の数，H の内線の D_l だけについての $F(D)$ の次数を表わす．

連結な H について (2) が成りたっていれば，非連結なものについてもそうであることは自明である．G が分離線を含む場合，分離線に対応する Feynman 伝播関数は明らかに Feynman 積分の収束性とは無関係だから，以下の記述の簡略のため G は分離線を含まないものと約束しておく．

6-1 d　証明の予備的考察　証明に先だって，考える積分を簡単化しておこう．$F(D)$ を 5-1 の (33) に作用させると 5-1 の (39) のように多くの項を生ずるが，もちろん各項について考察すれば十分である．

Y_l と $X_{ll'}$ は次のように評価される．5-2 の (30) により，任意の内線 l に対し

$$\alpha_l U \geqq \sum_{S'\ni l} W_{S'} \geqq \left\| \begin{bmatrix} S \\ l \end{bmatrix} \right\| W_S \tag{3}$$

であるから，Y_l の位相公式 5-2 の (42) により

$$|(Y_l)_\mu| \leqq \sum_S \left| \sum_{l'} \begin{bmatrix} S \\ l' \end{bmatrix} (q_{l'})_\mu \right| \tag{4}$$

を得る．(4) の右辺は Feynman パラメーターを含まないから，Y_l は有界な量であることがわかる*．同様に，5-2 の (65) により G の任意の回路 C に対して

$$U \geqq (\sum_{l\in C} \alpha_l) U_C \tag{5}$$

であるから，$X_{ll'}$ の位相公式 5-2 の (43) により

$$|(X_{ll'})_{\mu\nu}| \leqq \sum_{C\ni l,l'} (\sum_{l''\in C} \alpha_{l''})^{-1} \tag{6}$$

であることがわかる．

さらに $|e^{-iV}|=1$ であるから，以上のことを総合すると，Feynman パラメーター公式の絶対収束を証明するのは

$$\left(\prod_l \int_0^\infty d\alpha_l\right) \frac{\exp(-\sum_l \varepsilon_l \alpha_l)}{U^{\nu/2} \prod_{j=1}^m (\sum_{l\in C_j'} \alpha_l)} \tag{7}$$

の収束を証明すれば十分であることになる．ただし C_j' は l_{2j-1}' と l_{2j}' を

* これが奇数次の発散の起こらない理由である．

含むような回路で，$\{l_1', \cdots, l_{2m}'\}$ は因子 $\prod_{j=1}^{2m} D_{l_j'}$ を含む項が少なくとも1つ $F(D)$ に含まれるような内線の組である．したがって，もちろん $2m$ は $F(D)$ の次数 f をこえない．

［補助定理］ $\Phi(\alpha_1, \cdots, \alpha_N)$ を

$$\Psi(a_1, \cdots, a_N) \equiv \int_0^{a_1} d\alpha_1 \cdots \int_0^{a_N} d\alpha_N \Phi(\alpha_1, \cdots, \alpha_N) \qquad (8)$$

が任意の $a_j>0$ $(j=1, \cdots, N)$ に対して収束しかつ絶対値が $a_1, \cdots, a_N$ の多項式でおさえられるような $\alpha_1, \cdots, \alpha_N$ の関数とする．そのとき $\varepsilon_j>0$ $(j=1, \cdots, N)$ に対し

$$K \equiv \int_0^{\infty} d\alpha_1 \cdots \int_0^{\infty} d\alpha_N \Phi(\alpha_1, \cdots, \alpha_N) \exp(-\sum_j \varepsilon_j \alpha_j) \qquad (9)$$

は収束する．

証明は容易である．(9) を各変数について順次部分積分すると，

$$K = (\prod_j \varepsilon_j) \int_0^{\infty} d\alpha_1 \cdots \int_0^{\infty} d\alpha_N \Psi(\alpha_1, \cdots, \alpha_N) \exp(-\sum_j \varepsilon_j \alpha_j) \quad (10)$$

となる．仮定により Ψ は多項式でおさえられるから，(10) の収束は明らかである．(証明終)

この補助定理により，問題は任意の $a>0$ に対し*

$$\left(\prod_l \int_0^{a_l} d\alpha_l\right) \frac{1}{U^{\nu/2} \prod_{j=1}^{m} \left(\sum_{l \in C_j'} \alpha_l \right)} \qquad (11)$$

が収束して，a の多項式でおさえられることを示せばよい．

6-1e 定理の証明 (11) のような積分の収束性を示すのにいつも用いる方法は，α_l 相互間の大小関係により積分領域を $N!$ 個の部分領域に分割することである．こうすると G の N 個の内線に 1, 2, $\cdots$, N のように番号をつけて，

$$0 \leqq \alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \cdots \leqq \alpha_N \qquad (12)$$

であるものと仮定することができる．番号のつけ方は任意であるから，これによって何ら一般性を失うことはない．

さて，U の各項 $\alpha_{k_1}\alpha_{k_2}\cdots\alpha_{k_L}$ を $k_1<\cdots<k_L$ となるように書き，それらを右から左読みの辞書式順序に並べたときの第1番目の項を $\alpha_{l_1}\alpha_{l_2}\cdots\alpha_{l_L}$ としよう．つまり U の中の他の任意の項 $\alpha_{k_1}\alpha_{k_2}\cdots\alpha_{k_L}$ に対しつね

* 前章と同様，a は a_l をすべての l について一括して考えることを表わす．

に $l_\kappa=k_\kappa$, $\cdots$, $l_{j+1}=k_{j+1}$, $l_j>k_j$ ($j=\kappa$ でもよい) が成りたつような項をとり出すわけである. $\alpha_{l_1}\alpha_{l_2}\cdots\alpha_{l_\kappa}$ は U の中の 1 項であるから当然

$$U\geqq\alpha_{l_1}\alpha_{l_2}\cdots\alpha_{l_\kappa} \tag{13}$$

が成立する. また (12) と分離線不存在の仮定と (11) から

$$0\leqq\alpha_{l_1}\leqq\alpha_{l_2}\leqq\cdots\leqq\alpha_{l_\kappa}=\alpha_N\leqq a_N \tag{14}$$

である.

補樹木 $T^*\equiv\{l_1, \cdots, l_\kappa\}$ は 5-2 の (8) が成立するような基本回路系 $\{C_1, \cdots, C_\kappa\}$ を決定する. そこで H_k ($k=0, 1, \cdots, \kappa$) を

$$|H_k|=\bigcup_{i=1}^{k}C_i, \qquad |H_0|=\phi \tag{15}$$

なる部分 Feynman 図とする. 定義から明らかに

$$\kappa_{H_k}=k \tag{16}$$

である. なお記号の簡単化のため, 以下で $N_{H_k}\equiv N_k$, $f_{H_k}\equiv f_k$ と略記する. もちろん $N_\kappa=N$, $N_0=0$ である.

次に (11) に現われる回路 C_j' のとり扱いであるが, $|H_0|$, $|H_1|$, $\cdots$, $|H_\kappa|$ は単調増大な集合列で, 最後の $|H_\kappa|$ はすべての回路を含むから, 各 C_j' に対し

$$C_j'\not\subset|H_{k-1}|, \qquad C_j'\subset|H_k| \tag{17}$$

なる番号 k ($1\leqq k\leqq\kappa$) が必ず存在するはずである. (17) により C_j' は C_1, $\cdots$, C_{k-1} とは独立だが, それに C_k をつけ加えた C_1, $\cdots$, C_k とはもはや独立でないのだから, $|H_k|-|H_{k-1}|\subset C_j'$ でなければならない (そうでなければ(16)と矛盾する). 他方 5-2 の(8)により $l_k\in|H_k|-|H_{k-1}|$ であるから, $l_k\in C_j'$ である. したがって,

$$\sum_{l\in C_j'}\alpha_l\geqq\alpha_{l_k} \tag{18}$$

である.

回路 C_1', $\cdots$, C_m' のうち $|H_k|$ に含まれるものの数を m_k としよう ($m_\kappa=m$). このとき, C_j' の定義から l_1', $\cdots$, l_{2m}' のうち $|H_k|$ に含まれるものの数は少なくとも $2m_k$ 個ある. したがって,

$$2m_k\leqq f_k \tag{19}$$

が成立する.

さて, (13), (18) と (14), (19) から

$$\left[U^{\nu/2}\prod_{j=1}^{m}\Bigl(\sum_{l\in C_j'}\alpha_l\Bigr)\right]^2\geqq\prod_{k=1}^{\kappa}\alpha_{l_k}{}^{\nu+2(m_k-m_{k-1})}$$

$$=\prod_{k=1}^{\kappa-1}(\alpha_{l_k}/\alpha_{l_{k+1}})^{\nu k+2m_k}\cdot\alpha_{l_\kappa}{}^{\nu\kappa+2m_\kappa}$$

$$\geqq\prod_{k=1}^{\kappa-1}(\alpha_{l_k}/\alpha_{l_{k+1}})^{\nu k+f_k}\cdot\alpha_{l_\kappa}{}^{\nu\kappa+f_\kappa}/a_N{}^{f_\kappa-2m} \tag{20}$$

となる．そこで

$$\sigma\equiv\max_{1\leq k\leq\kappa}(\nu k+f_k)/2N_k \tag{21}$$

とおくとき，仮定 (2) により

$$0<\sigma<1 \tag{22}$$

である．(21) を

$$\nu k+f_k\leqq 2N_k\sigma \tag{23}$$

のように書き直し，これを (20) に用いると

$$U^{\nu/2}\prod_{j=1}^{m}\Big(\sum_{l\in C_j'}\alpha_l\Big)\geqq\prod_{k=1}^{\kappa-1}(\alpha_{l_k}/\alpha_{l_{k+1}})^{N_k\sigma}\cdot\alpha_{l_\kappa}{}^{N\sigma}/a_N{}^h$$

$$=\Big(\prod_{k=1}^{\kappa}\alpha_{l_k}{}^{N_k-N_{k-1}}\Big)^{\sigma}\Big/a_N{}^h$$

$$\geqq\Big(\prod_{j=1}^{N}\alpha_j\Big)^{\sigma}\Big/a_N{}^h \tag{24}$$

となる．ただし

$$h\equiv N\sigma-\frac{1}{2}\nu\kappa-m\geqq 0 \tag{25}$$

で，(24) の最後のステップでは，任意の $l\in|H_k|$ に対し

$$\alpha_l\leqq\alpha_{l_k} \tag{26}$$

であることを用いた．実際，$\alpha_l>\alpha_{l_k}$ すなわち $l>l_k$ なる l が H_k に属していたとすると，H_k の l を含む 1 つの補樹木と縮約図 $G/|H_k|$ の補樹木である $\{l_{k+1},\cdots,l_\kappa\}$ とを合併して得られる G の補樹木は，T^* よりも辞書式順序において前になることになり T^* の定義に反する．ゆえに(26)が成立しなければならない．

(24), (22) を用いると，(11) のうち (12) を満たす部分の積分は

$$\int_0^{a_1}d\alpha_1\cdots\int_0^{a_N}d\alpha_N\frac{a_N{}^h}{\prod_{j=1}^{N}\alpha_j{}^{\sigma}}=\frac{a_N{}^h\prod_{j=1}^{N}a_j{}^{1-\sigma}}{(1-\sigma)^N} \tag{27}$$

でおさえられる．(22), (25) のゆえに (27) の右辺を $a_1,\cdots,a_N$ の多項式でおさえるのは容易である．(証明終)

6-2 くりこみ理論の概要

Feynman 積分は一般に紫外発散を含むが，形式的にその無限大を引き算して有限化するのがくりこみの処法である．このとき重要なことは，それらの形式的引き算項が Lagrangian 密度に形式的に *くりこみ項(counter term)をつけ加えることにより生成されることである．さらに，くりこみ項は Lagrangian 密度に最初から含まれている質量や結合常数などのパラメーターの値を形式的にかえるという操作でくりいれてしまうことができる．これらのくりこまれた質量や結合常数をそれらの観測値と同一視することにより，くりこみ項を見かけ上消してしまえるわけである．このようにして不定性なく紫外発散を完全に消去するのが *くりこみ理論(renormalization theory)である．

本節ではくりこみ理論の概要について述べる．厳密な考察は 6-4 で行なうことにする．

6-2 a　くりこみ可能性　紫外発散の存在は，前節の次数勘定定理によって判定される．すべての H に対し $d_H<0$ ならば紫外発散がないが，1つでも $d_H \geqq 0$ なる H があれば，特別な対称性によって発散がおちるのでない限り，紫外発散があると考えなければならない．したがって，一般の Feynman 積分は紫外発散をいくつも複雑な形で含んでいることになり，それをすべて除去するのはなかなか厄介な仕事である．それで通常無限大の引き算は摂動の次数 n に関し数学的帰納法を用いて行なう．すなわち，より低次のところではすでに発散はくりこみによって除去されたと仮定し，Feynman 図 G の全体から起こる発散だけを問題にするわけである．こうすると見かけの発散の次数 d が負でない Feynman 図だけを考察すればよいことになる．

まず簡単のため相互作用 Lagrangian 密度 $\mathcal{L}_I$ はただ1つの項から成るものとしよう．$\mathcal{L}_I$ に含まれるフェルミオン場の数を h_F (つねに偶数)，ボゾン場の数を h_B，微分演算子の数を δ とする．また G の頂点の数を n，フェルミオンの内線と外線の数をそれぞれ N_F, r_F，ボゾンの内線と外線の数をそれぞれ N_B, r_B，微分結合の数を n_D とする．そうすると，Feynman 図の構成から次の関係式が成立する．

$$2N_F+r_F=h_F n \qquad (1)$$

$$2N_B+r_B=h_Bn \tag{2}$$

$$n_D=\delta n \tag{3}$$

これらの式と，$\kappa=N-n+1$，$N=N_F+N_B$ を 6-1 の (1) に代入すると，

$$d=\rho n-\frac{\nu-1}{2}r_F-\frac{\nu-2}{2}r_B+\nu \tag{4}$$

を得る．ここに

$$\rho\equiv\frac{\nu-1}{2}h_F+\frac{\nu-2}{2}h_B+\delta-\nu \tag{5}$$

ところで ν 次元の時空間においてフェルミオン場の次元は $[L^{-(\nu-1)/2}]$，ボゾン場の次元は $[L^{-(\nu-2)/2}]$ であるから，$[L^{\rho}]$ はちょうど $\mathcal{L}_I$ に含まれる結合常数の次元にほかならない．$\rho>0$ のときは d は n とともにいくらでも増大する．すなわち高次の項にいけばいくらでも新しい種類の発散が生ずるので，有限個のくりこみ項で処理することは不可能である．つまり ♦くりこみ不可能 (unrenormalizable) である．これに反し $\rho\leqq 0$ のときは d は一定の値を超えないから，有限個のくりこみ項で処理できる可能性がある．実際この場合は，♦くりこみ可能 (renormalizable) であることが示される．$\rho<0$ のときは，全体からの紫外発散のある Feynman 図の数が有限個であるので，とくに ♦超くりこみ可能 (superrenormalizable) と呼ぶことがある．

くりこみ可能な $\mathcal{L}_I$ の種類は，ν が大きくなると少なくなる．直接結合の場合 ($\delta=0$) で，かつ線形変換で自由場に帰着させられないようなもの (すなわち $h_F+h_B\geqq 3$) は次のものしかない．

$\nu=2$ のとき：　$h_F=0, 2, 4$; $h_B\geqq 3-h_F$.

$\nu=3$ のとき：　$h_F=0$ なら $3\leqq h_B\leqq 6$; $h_F=2$ なら $h_B=1, 2$.

$\nu=4$ のとき：　$h_F=0$ なら $h_B=3, 4$; $h_F=2$ なら $h_B=1$ のみ．

$\nu=5, 6$ のとき：$h_F=0$ かつ $h_B=3$ のみ．

つまり $\nu=4$ はフェルミオン場がくりこみ可能な相互作用のできる最高の時空間の次元である．微分結合の場合はさらに制限がきつくなる．

$\mathcal{L}_I$ がいくつかの項を含む場合は，不定計量を用いて発散の相殺をはかる場合 (6-3 b 参照) を除外すると，d の式は (4) の第 1 項 ρn を $\sum_j \rho_j n_j$ におきかえればよい．ただし ρ_j は $\mathcal{L}_I$ の中の 1 項 $\mathcal{L}_{Ij}$ の結合常数の次元，n_j は $\mathcal{L}_{Ij}$ による G の頂点の数を表わす．したがって，すべての j につき $\rho_j\leqq 0$ のときのみくりこみ可能である．なお，Proca 場の第 0 成

分のように場の量が正準変数にならない場合は，正準変数で書き改めてから微分の次数を勘定するものとする．

6-2 b 見かけの発散とくりこみ項 以下くりこみ可能な理論だけを考察する．例として最も重要な $\nu=4,\ h_F=2,\ h_B=1,\ \delta=0$ の場合のみを考えることにする．このとき $\rho=0$ だから (4) は

$$d=4-(3/2)r_F-r_B \tag{6}$$

となる．$r_F+r_B=0, 1$ の Feynman 図は 0 でない外線運動量がないから，実際上の考察の対象にする必要はない．それゆえ $r_F+r_B\geqq 2$ として $d\geqq 0$ になる場合を列挙してみると，次の 5 通りがある．

1. $r_F=2,\ r_B=0\quad (d=1)$
2. $r_F=0,\ r_B=2\quad (d=2)$
3. $r_F=2,\ r_B=1\quad (d=0)$
4. $r_F=0,\ r_B=3\quad (d=1)$
5. $r_F=0,\ r_B=4\quad (d=0)$

量子電磁力学のときは，Furry の定理（4-3 h 参照）のため 4 の場合は存在せず，またゲージ不変性（4-3 f, g 参照）のため 5 の場合も発散を含まないから無視できる．擬スカラー場との γ_5 相互作用 2-7 の (7) のときは，空間反転不変性のために 4 の場合は存在しない．スカラー場とのスカラー相互作用 2-7 の (4) のときは，5 通りのものを全部考慮しなければならない．

くりこみの処法はこれらのそれぞれの発散に対応するくりこみ項を導入することである．すなわち，上の表の $r_F,\ r_B$ をそれぞれ $h_F,\ h_B$ におきかえて得られる新しい相互作用項を導入する．このとき $d>0$ の場合に対しては，Lorentz 不変性と矛盾しない限り微分結合の項をも考慮しなければならない．それゆえ，くりこみ項の種類は次のようになる．

- 1 a. $h_F=2,\ h_B=0,\ \delta=0\cdots\delta m$
- 1 b. $h_F=2,\ h_B=0,\ \delta=1\cdots Z_2$
- 2 a. $h_F=0,\ h_B=2,\ \delta=0\cdots\delta\mu^2$
- 2 b. $h_F=0,\ h_B=2,\ \delta=2\cdots Z_3$
- 3. $h_F=2,\ h_B=1,\ \delta=0\cdots Z_1$
- 4. $h_F=0,\ h_B=3,\ \delta=0\cdots\delta g$
- 5. $h_F=0,\ h_B=4,\ \delta=0\cdots\delta\lambda$

右端に書いたのは，それぞれのくりこみ項に現われる新しい無限大を含む

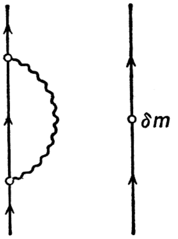
パラメーターで，♦くりこみ常数(renormalization constant)と呼ばれている．詳しくは δm, $\delta\mu^2$ を♦質量のくりこみ常数(mass renormalization constant)，Z_2, Z_3 を♦波動関数のくりこみ常数(wave-function renormalization constant)，Z_1, δg, $\delta\lambda$ を♦頂点のくりこみ常数(vertex renormalization constant)という．

上の定義からわかるように，質量のくりこみ常数を含む項は自由場の Lagrangian 密度の質量項と全く同じ形をしている．これらはすでに 4-2 j で述べた自己質量項にほかならない．波動関数のくりこみ常数の項は自由場の微分を含む項と同じ形をしている．2-8 e で考えたはだかの確率 Z が波動関数のくりこみ常数にほかならない．光子の Z_3 については 3-5 c で論じた．

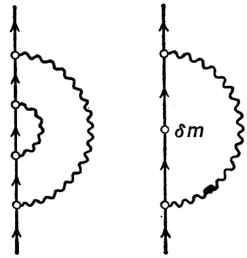
量子電磁力学では，δg, $\delta\lambda$ は不要で，またゲージ不変性により $\delta\mu^2=0$ である．さらにあとで証明するように $Z_1=Z_2$ であるから，くりこみ常数は δm, Z_3, Z_2 の 3 つだけとなる．量子電磁力学以外では，たとえば $\delta\lambda$ のようなボゾンだけのくりこみ項を新たに導入する必要があるので，最初からくりこみ可能な相互作用は Lorentz 不変性や他の対称性の許す限り全部存在するものとして出発する方が自然である．

以下簡単のため量子電磁力学の場合について説明する．

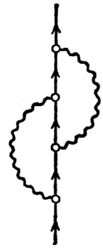
6-2 c 自己エネルギー 外線の数が 2 本の Feynman 図からの寄与を♦自己エネルギー(self-energy)と総称する．分離線を含まない場合すなわち強連結な場合を♦proper (例: 6·1 図〜6·4 図)，それ以外の場合を♦improper (例: 6·5 図)という．電子の proper な自己エネルギーの総和(自己質量項からの寄与も含めて)を $\Sigma^{(*)}(p)$，光子のそれを $\Pi^{(*)}{}_{\mu\nu}(p)$ で表

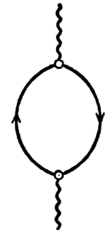


6·1 図



6·2 図

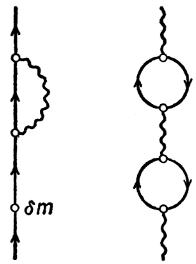

6·3 図


6·4 図

わす*. $\Sigma^{(*)}(p)$ はガンマ行列を含む 4 次の正方行列である. $\Pi^{(*)}{}_{\mu\nu}(p)$ はゲージ不変性により

$$\Pi^{(*)}{}_{\mu\nu}(p)=-(p^2g_{\mu\nu}-p_\mu p_\nu)\Pi^{(*)}(p) \qquad (7)$$

と書くことができる (4-3 f 参照).



6・5 図

本節では電子の運動量表示での Feynman 伝播関数に $(2\pi)^4i$ を乗じたものを $S_F(p)$, 光子のそれを $D_F{}^{\mu\nu}(p)$ と書く. すなわち 4-3 の (6), (7) により

$$S_F(p)\equiv 1/(m-\gamma p-i\varepsilon) \qquad (8)$$

$$D_F{}^{\mu\nu}(p)\equiv-\left[g^{\mu\nu}+(1-\alpha)\frac{p^\mu p^\nu}{-p^2-i\varepsilon}\right]D_F(p) \qquad (9)$$

$$D_F(p)\equiv 1/(-p^2-i\varepsilon) \qquad (10)$$

である.

そうすると, 電子, 光子の自己エネルギー $\Sigma(p)$, $\Pi_{\mu\nu}(p)$ はそれぞれ**

$$\Sigma(p)=\Sigma^{(*)}(p)+\Sigma^{(*)}(p)S_F(p)\Sigma^{(*)}(p)$$
$$+\Sigma^{(*)}(p)S_F(p)\Sigma^{(*)}(p)S_F(p)\Sigma^{(*)}(p)+\cdots \qquad (11)$$

$$\Pi_{\mu\nu}(p)=\Pi^{(*)}{}_{\mu\nu}(p)+\Pi^{(*)}{}_{\mu\rho}(p)D_F{}^{\rho\sigma}(p)\Pi^{(*)}{}_{\sigma\nu}(p)+\cdots$$
$$=-(p^2g_{\mu\nu}-p_\mu p_\nu)[\Pi^{(*)}(p)+\Pi^{(*)}(p)D_F(p)\Pi^{(*)}(p)+\cdots] \qquad (12)$$

と書き表わすことができる.

次に ♦補正された伝播関数 (modified propagator) を

$$S_F'(p)\equiv S_F(p)+S_F(p)\Sigma(p)S_F(p) \qquad (13)$$

$$D_F'^{\mu\nu}(p)\equiv D_F{}^{\mu\nu}(p)+D_F{}^{\mu\rho}(p)\Pi_{\rho\sigma}(p)D_F{}^{\sigma\nu}(p) \qquad (14)$$

で定義する. (11), (12) をそれぞれ (13), (14) に代入し, 正方行列 A, B に対し形式的に成立する恒等式

$$A+ABA+ABABA+\cdots=A(1-BA)^{-1}=(A^{-1}-B)^{-1} \qquad (15)$$

を用いると, 次の関係式を得る.

$$[S_F'(p)]^{-1}=m-\gamma p-\Sigma^{(*)}(p) \qquad (16)$$

$$D_F'^{\mu\nu}(p)=-\left(g^{\mu\nu}+\frac{p^\mu p^\nu}{-p^2-i\varepsilon}\right)D_F'(p)+\alpha\frac{p^\mu p^\nu}{(-p^2-i\varepsilon)^2} \qquad (17)$$

$$[D_F'(p^2)]^{-1}=-p^2-\Pi^{(*)}(p) \qquad (18)$$

ただし (16), (18) では $-i\varepsilon$ を省略した. (17) に見られるように α に比例

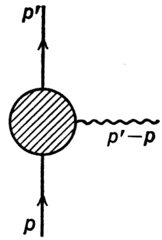
---

* 星印には括弧をつけないのが普通だが, 複素共役とまぎらわしいから本書では括弧をつけた.

** 自己エネルギーの定義式は $1/(2\pi)^4i$ という因子を含むことに注意 (4-5 参照).

するゲージ項は相互作用による補正を受けない．

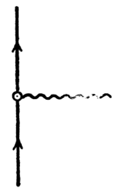
6-2 d　Dyson の積分方程式　$r_F=2$, $r_B=1$ すなわち 6·6 図のような Feynman 図からの寄与を♦頂点部分 (vertex part) という．とくに強連結な Feynman 図のみに限ったものを♦proper な頂点部分といい，その総和を $e\Gamma_\mu(p', p)$ で表わす．一般の頂点部分は，proper な頂点部分の外線のところにそれぞれの自己エネルギーの補正をすることによって得られるから，proper な頂点部分だけに話を限って十分である．$\Gamma_\mu(p', p)$ の最低次の項 (6·7 図) は γ_μ だから，



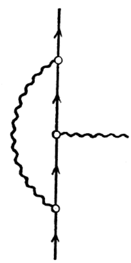
6·6 図

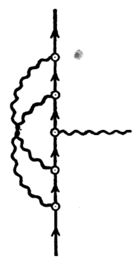
$$\Gamma_\mu(p', p)\equiv\gamma_\mu+\Lambda_\mu(p', p) \tag{19}$$

とおく．


6·7 図

proper な自己エネルギーの Feynman 図あるいは proper な頂点部分の Feynman 図が，その真の部分 Feynman 図として自己エネルギーも，6·7 図以外の頂点部分も含まないとき，♦既約 (irreducible) であるという．電子の自己エネルギーの既約な Feynman 図は 6·1 図の 2 つだけである．たとえば 6·2 図は電子の自己エネルギーを内部に含み，6·3 図は頂点部分を内部に含むから既約ではない．同様に光子の自己エネルギーは 6·4 図のものただ 1 つである．ところが proper な頂点部分については無限にたくさんの既約な図が存在する．その 2 次のもの，4 次のもの* をそれぞれ 6·8 図，6·9 図に掲げた．


6·8 図


6·9 図

既約な自己エネルギーあるいは頂点部分にすべての自己エネルギーと proper な頂点部分の補正をすると，すべての proper な自己エネルギーあるいは頂点部分が得られる．ただこのさい注意しなければならないのは，2 つの頂点をもつ既約な自己エネルギーの図において頂点部分の補正をするときは，片方の頂点についてのみやれば十分であることである．両方について補正すると，たとえば 6·3 図を 2 回勘定することになってしまう．

* 頂点部分の次数は，習慣上外線光子の入っている頂点を勘定に入れない．

このことから次の積分方程式が得られる.

$$\Sigma^{(*)}(p)=\frac{e^2}{(2\pi)^4 i}\int d^4k\,\gamma_\nu S_F'(p-k)\Gamma_\mu(p-k,\,p)D_F'^{\mu\nu}(k)+\delta m \quad (20)$$

$$\Pi^{(*)}{}_{\mu\nu}(p)=-\frac{e^2}{(2\pi)^4 i}\int d^4k\,\mathrm{tr}[S_F'(p+k)\gamma_\mu S_F'(k)\Gamma_\nu(k,\,p+k)] \quad (21)$$

$$\Lambda_\mu(p',\,p)=\frac{e^2}{(2\pi)^4 i}\int d^4k\,\Gamma_\rho(p',\,p'-k)S_F'(p'-k)\Gamma_\mu(p'-k,\,p-k)$$
$$\times S_F'(p-k)\Gamma_\sigma(p-k,\,p)D_F'^{\rho\sigma}(k)+\cdots \quad (22)$$

これを ♦Dyson の積分方程式という. (16)〜(22) によって低次のものから高次のものが逐次決定される.

6-2 e　発散除去の方針　紫外発散を分離する一般的方法は, 外線運動量に関するベキ級数に展開してそのはじめの数項をとり除くことである. j 次の展開係数は p_μ に関する j 回の微分を含むから, その分母の次数と分子の次数との差は, もとの積分のそれより j だけ大きい. したがって, $j=0,\,1,\,\cdots,\,d$ までの項は見かけの発散を含むが, 剰余項は少なくとも見かけ上収束の形になる. つまり展開の d 次までの項を引き算すればよいことがわかる.

発散を除去するだけならばどの値のまわりで展開してもかまわない. 実際, 6-4 において行なうように $p_\mu=0$ のまわりで展開するのが数学的には最も簡単である. しかしながら, くりこんだあとの式が物理的に正しく解釈できるためには, p_μ が自由場の方程式を満たすところで展開すべきである. $\Sigma^{(*)}(p)$ に現われるガンマ行列は γp の形でのみ含まれ, かつ $p^2=(\gamma p)^2$ であるから, すべて γp の関数として書き表わされるゆえ, γp をあたかも c 数であるかのようにとり扱うことができる. $\Sigma^{(*)}(p)$ を $\gamma p=m$ のまわりで展開すると,

$$\Sigma^{(*)}(p)=\delta m+A+B(m-\gamma p)+(m-\gamma p)^2 S(\gamma p) \quad (23)$$

のように書ける. ここに A, B は無限大の常数 (対数発散) で, $S(\gamma p)$ は見かけの発散を含まない関数である. 自己質量を

$$\delta m=-A \quad (24)$$

によって定義することにより, (16) から $S_F'(p)$ が $S_F(p)$ を因子として含むことがわかる. つまり $p^2=m^2$ に極をもつ.

$\Pi^{(*)}(p)$ についても同じようにやると, $j=0,\,1,\,2$ まで引き算する必要があるが, j が奇数の項は Lorentz 不変性により存在しない. また $j=0$ の項はゲージ不変性によって存在しないはずなので, 結局

$$\Pi^{(*)}(p)=C\cdot(-p^2)+(-p^2)^2\cdot P(p^2) \tag{25}$$

のように展開される．ここに C は無限大の常数（対数発散）で，$P(p^2)$ は見かけの発散を含まない関数である．

$\Lambda_\mu(p', p)$ は2つの独立な外線運動量を含むが，幸い $d=0$ であるから，p, p' 両方に関して展開するまでもなく γ_μ に比例する常数項（対数発散）を引き算するだけで十分である．

6-2 f　重複発散の問題　以上によって見かけの発散は全部除去されるが，もちろんまだ内部からの発散が残っているから問題がかたづいたことにはならない．内部からの発散を除くには数学的帰納法を用いる．Dyson の方程式において左辺の n 次の項を計算するには，右辺では，S_F', $D_F'^{\mu\nu}$, Γ_μ の $n-2$ 次以下のものしか必要でない．帰納法の仮定によってこれらは収束しているとしているから，全体からの発散を上述の方法で除去すれば n 次の項も収束し，帰納法が完結するように思われる．ところがじつは問題はそう簡単にはいかない．どこがいけないのかは，帰納法の指示に従って具体的にやってみればわかる．

上のやり方では $d_H \geqq 0$ の部分 Feynman 図の見かけの発散を，小さいものから順に除去していくことになる．ただし H_1 が H_2 よりも小さいとは，$|H_1|$ が $|H_2|$ の真の部分集合であることである．ところが一般には H_1 と H_2 は必ずしも大小の比較ができない．大小が比較できなくても $|H_1|\cap|H_2|=\phi$ ならばこれらは独立に扱えるから困難は生じないが，$|H_1|\cap|H_2|\neq\phi$ のときはどうにもならない．一般に $|H_1|$ と $|H_2|$ が共通要素をもちそのどちらも他の部分集合でないときの発散を ⁎重複発散 (overlapping divergence) という．その最も簡単な例は6·3図である．重複発散の存在のために上述のような素朴な帰納法は成立しないのである．

重複発散の困難により，(20), (21) を用いてくりこみを遂行することができない．ただ，Γ_μ に関しては重複発散が生じないので (22) だけは上述のような帰納法的考察が適用できる．Γ_μ が内部の自己エネルギーの部分を除いては，重複発散をもたないことを次に証明しておこう．

Feynman 図 G の部分 Feynman 図 H_1 と H_2 が重複発散であったとしよう．このとき H_1 の外線のいくつかは H_2 の内線でなければならないが，$|H_2|$ は回路の合併であるから少なくとも2つの H_1 の外線が H_2 の内線と一致しなくてはならない．他方，H_1 が全体からの発散を含むためには H_1 の外線の総数は3をこえることはできない．したがって，H_2 の内線と

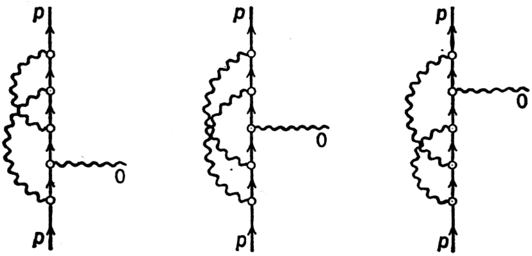
一致しない H_1 の外線の数は多くとも1つである. 全く同じ推論により H_1 の内線でない H_2 の外線はたかだかただ1つである. したがって, H_1 と H_2 とを合併してできる部分 Feynman 図の外線の数は2をこえることができない. もちろん外線の数が0または1の G の部分 Feynman 図はありえないから, H_1 と H_2 は G の中の自己エネルギー部分に含まれていることになる. (証明終)

6-2g 重複発散の回避 自己エネルギーにおける重複発散の問題は, 直接これととりくむよりも変形して proper な頂点部分の問題に帰着させるのが賢明である.

まず次の関係に注意する.

$$\frac{\partial S_F(p)}{\partial p^\mu}=-S_F(p)\frac{\partial[S_F(p)]^{-1}}{\partial p^\mu}S_F(p)$$
$$=S_F(p)\gamma_\mu S_F(p) \tag{26}$$

これに e を乗ずると (26) の右辺は電子の内線に4次元運動量0の光子の外線が入ったものに相当する.



6·10 図

任意の電子の proper な自己エネルギーの Feynman 図において, 外線の運動量 p_μ を電子の線に沿って流すとき*, $\partial/\partial p^\mu$ を作用させると電子の内線の個数だけの proper な頂点部分の Feynman 図が得られることになる. たとえば, 6·3 図についてこれを行なうと 6·10 図の3つの図が得られる. この操作によって $\Lambda_\mu(p,p)$ にきく Feynman 図はすべて $\Sigma^{(*)}(p)$ の Feynman 図から導かれる. したがって,

$$(\partial/\partial p^\mu)\Sigma^{(*)}(p)=\Lambda_\mu(p,p) \tag{27}$$

* ループに属する電子の内線は, 積分運動量に p_μ をつけ加えても微分すれば Furry の定理によって消える. 逆に頂点部分の図で運動量0の光子の外線がループに入っているものは, ゲージ不変性によりゼロである.

という関係式が成立する．これは (16) と (19) を用いると，

$$(\partial/\partial p^{\mu})[S_F'(p)]^{-1}=-\Gamma_{\mu}(p, p) \tag{28}$$

と書き直すことができる．

(27) を線積分の形で

$$\Sigma^{(*)}(p)-\Sigma^{(*)}(p^{(0)})=\int_{p^{(0)}}^{p}dk^{\mu}\Lambda_{\mu}(k, k) \tag{29}$$

のように書くことができる*．$\gamma p^{(0)}=m$ とおくと，(23), (24) により

$$\Sigma^{(*)}(p^{(0)})=0 \tag{30}$$

である．(29) により $S_F'(p)$ が重複発散を含まない形に書き表わされたことになる．すなわち

$$[S_F'(p)]^{-1}=m-\gamma p-\int_{p^{(0)}}^{p}dk^{\mu}\Lambda_{\mu}(k, k) \tag{31}$$

光子の自己エネルギーについては，同様な関係式は存在しないが，(27) にならって

$$(\partial/\partial p^{\mu})\Pi^{(*)}(p)\equiv\Delta_{\mu}(p, p) \tag{32}$$

のように 3 本の光子の外線をもつ proper な頂点部分を定義することができる．Δ_{μ} は 3 本の光子の外線をもつ Feynman 図のすべてを含むわけではないから， Furry の定理は適用されないのでゼロにはならない．(32) を積分すると

$$[D_F'(p)]^{-1}=-p^2-\int_{0}^{p}dk^{\mu}\Delta_{\mu}(k, k) \tag{33}$$

となる．Δ_{μ} の見かけの発散は

$$\Delta^{c}{}_{\mu}(k, k)\equiv\Delta_{\mu}(k, k)-\Delta_{\mu}(0, 0)-k^{\nu}\cdot\partial\Delta_{\mu}(q, q)/\partial q^{\nu}|_{q=0} \tag{34}$$

を考えれば除去される．ただし，Lorentz 共変性により $\Delta_{\mu}(0, 0)=0$ で，$\partial\Delta_{\mu}/\partial q^{\nu}|_{q=0}$ は $g_{\mu\nu}$ に比例するから

$$\partial\Delta_{\mu}(q, q)/\partial q^{\nu}|_{q=0}=-2Cg_{\mu\nu} \tag{35}$$

のように書ける ((25) と (32) 参照)．

6-2 h　くりこみの定義　さて，くりこみ理論の核心は，

$$S_F'(p)\equiv Z_2S_F^{\text{ren}}(p) \tag{36}$$

$$D_F'^{\mu\nu}(p)\equiv Z_3D_F^{\text{ren}\,\mu\nu}(p) \tag{37}$$

$$\Gamma_{\mu}(p', p)\equiv Z_1^{-1}\Gamma^{\text{ren}}{}_{\mu}(p', p) \tag{38}$$

$$e^{\text{ren}}\equiv Z_1^{-1}Z_2Z_3^{1/2}e \tag{39}$$

とおいて，$S_F^{\text{ren}}(p)$, $D_F^{\text{ren}\,\mu\nu}(p)$, $\Gamma^{\text{ren}}{}_{\mu}(p', p)$ の中に含まれる e をすべて

---

*　積分の経路は任意である．たとえば $k^{\mu}=\lambda p^{\mu}+(1-\lambda)p^{(0)\mu}$ $(0\leqq\lambda\leqq1)$．

e^{ren} に書き改めたとき，これらの量は紫外発散を全く含まない Feynman 積分で書き表わされ，かつこれらの量は $S_F'(p)$, $D_F'^{\mu\nu}(p)$, $\Gamma_\mu(p', p)$ の間の関係式（ただし (20), (21) は使わない）と全く同形の関係式を満足することである．

$D_F^{\mathrm{ren}\,\mu\nu}(p)$ を (17) と同様に

$$D_F^{\mathrm{ren}\,\mu\nu}(p) = -\left(g^{\mu\nu} + \frac{p^\mu p^\nu}{-p^2 - i\varepsilon}\right) D_F^{\mathrm{ren}}(p) + \alpha^{\mathrm{ren}} \frac{p^\mu p^\nu}{(-p^2 - i\varepsilon)^2} \quad (40)$$

と書くと，(37) から

$$D_F'(p) = Z_3 D_F^{\mathrm{ren}}(p) \quad (41)$$

$$\alpha = Z_3 \alpha^{\mathrm{ren}} \quad (42)$$

でなければならないことがわかる．(42) はゲージ・パラメーターも Landau ゲージの場合を除いてはくりこみの影響をうけることを示している．

また $S_F^{\mathrm{ren}}(p)$ と $\Gamma^{\mathrm{ren}}{}_\mu(p, p)$ も (28) と同形の関係式を満たすので，

$$Z_1 = Z_2 \quad (43)$$

でなければならない．これを *Ward（ウォード）の関係式（Ward identity）といい，ゲージ不変性の帰結である．Ward の関係式により，(39) は

$$e^{\mathrm{ren}} = Z_3^{1/2} e \quad (44)$$

となる．

くりこみ常数 δm, Z_1, Z_2, Z_3 はもちろんすべて実数である．これは電子や光子が安定な粒子であることからいえる．Z_3 は光子のはだかの確率と解釈できる量で，$0<Z_3<1$ のはずである*．そうすると (44) により $e^{\mathrm{ren}}<e$ ということがわかる．Z_2 の方は，しかし，電子のはだかの確率であるとは解釈できない．それは $Z_1=Z_2$ の値はゲージに依存するからである．δm と Z_3 がゲージ不変な量であることは **4-3 f** の方法で示すことができる．Z_3 のゲージ不変性は，それがゲージに無関係な $D_F'(p)$ で定義されることからも見られる．なお δm と Z_3 は赤外発散を含まないが，$Z_1=Z_2$ は一般には赤外発散を含む．

量子電磁力学のもっと一般の場合すなわちいくつかの荷電粒子の場があるときにも，(44) はつねに成立する．e^{ren} は観測される荷電量と同一視されるが，(44) は e が等しい粒子は e^{ren} も相等しいことを示す．

6-2 i くりこみ可能性の証明 (31) と (33) によって重複発散の困難が

* 量子電磁力学が内部矛盾を含んでいなければそうなるという意味である．Z_3 の摂動級数の各項はもちろん発散している．

解消されているから，数学的帰納法を用いて上のくりこみ可能性の命題を証明することができる．$n-2$ 次以下の Feynman 図は $S_F{}^{\rm ren}$, $D_F{}^{\rm ren}$, $\Gamma^{\rm ren}{}_\mu$ を用いることによってすべて紫外発散を含まないものと仮定し，n 次の項に着目する．

(22) の右辺は第1項以外は具体的に書かなかったけれども，一般に e^{2j} の項は S_F' を $2j$ 個，$D_F'^{\mu\nu}$ を j 個，Γ_μ を $2j+1$ 個含むことは明らかである．したがって，(36)〜(39) を代入すると，

$$\Lambda_\mu(p',p)=Z_1{}^{-1}\Lambda_\mu(p',p;\ {\rm ren}) \tag{45}$$

のようになる．ここに $\Lambda_\mu(p',p;\ {\rm ren})$ は (22) の右辺をすべて ren のついた量で書き直したものである．それゆえ (19) と (38) から

$$\Gamma^{\rm ren}{}_\mu(p',p)=Z_1\gamma_\mu+\Lambda_\mu(p',p;\ {\rm ren}) \tag{46}$$

を得る．そこで

$$\Lambda_\mu(p',p;\ {\rm ren})\equiv L\gamma_\mu+\Lambda^c{}_\mu(p',p;\ {\rm ren}) \tag{47}$$

$$L\equiv\Lambda_\mu(p^{(0)},p^{(0)};\ {\rm ren})\qquad(\gamma p^{(0)}=m) \tag{48}$$

とおけば，上に述べたように $\Lambda^c{}_\mu(p',p;\ {\rm ren})$ は紫外発散を全く含まない積分だけで表わされる量であるはずで，

$$\Lambda^c{}_\mu(p^{(0)},p^{(0)};\ {\rm ren})=0 \tag{49}$$

を満たす．さらに

$$Z_1\equiv 1-L \tag{50}$$

とおくと，(46) は

$$\Gamma^{\rm ren}{}_\mu(p',p)=\gamma_\mu+\Lambda^c{}_\mu(p',p;\ {\rm ren}) \tag{51}$$

となり，$\Gamma^{\rm ren}{}_\mu$ が紫外発散を含まない量であることがわかる．

次に (31) に (36) と (45) を代入すれば

$$Z_2{}^{-1}[S_F{}^{\rm ren}(p)]^{-1}=m-\gamma p-Z_1{}^{-1}\int_{p^{(0)}}^{p}dk^\mu\Lambda_\mu(k,k;\ {\rm ren}) \tag{52}$$

を得る．(47), (50), (43) を用いると

$$[S_F{}^{\rm ren}(p)]^{-1}=m-\gamma p-\int_{p^{(0)}}^{p}dk^\mu\Lambda^c{}_\mu(k,k;\ {\rm ren}) \tag{53}$$

となって，$S_F{}^{\rm ren}(p)$ は紫外発散を含まない量で表わされることがわかる．

(53) を得るのに本来 Ward の関係式 (43) を用いる必要はないことに注意しておこう．(28) が成立しない場合は，その左辺は別の proper な頂点部分 Γ_μ' の定義になるわけで，$\Gamma_\mu'-\gamma_\mu$ について (22) と同様なしかし Γ_μ' については1次の式が成立し，したがって (52) の右辺で $Z_1{}^{-1}$ の代り

に Z_2^{-1} が現われるわけである.

なお (53) に (36), (16) を代入して $\Sigma^{(*)}(p)$ について解いてみると

$$\Sigma^{(*)}(p)=Z_2^{-1}\left[(Z_2-1)(m-\gamma p)+\int_{p^{(0)}}^{p}dk^{\mu}\Lambda^{c}{}_{\mu}(k, k; \mathrm{ren})\right] \tag{54}$$

となる. (29), (30), (48) からわかるように, (54) の右辺の第2項の積分は $(m-\gamma p)^2$ という因子をもつ. それゆえ (23) に (24) を代入した式と (54) とを比較してみると, 全体にかかる Z_2^{-1} を除いて, $B\sim Z_2-1$, $(m-\gamma p)^2S(\gamma p)\sim\int dk^{\mu}\Lambda^{c}{}_{\mu}$ という対応が成立する. 余分の因子 Z_2^{-1} は重複発散を正しく考慮したために生じたものということができる. これは (20) において γ_ν を Γ_ν のように考えて (36)〜(39) を代入したのと形式的に全く同じである.

上にやったのと同じことを光子の自己エネルギーについても行なう. まず Δ_μ の e^{2j} の項は S_F' を $2j+1$ 個, $D_F'^{\mu\nu}$ を $j-1$ 個, Γ_μ を $2j+1$ 個含むが, このうち Γ_μ の1つは $S_F'^{-1}$ の微分からきたものだから Z_1^{-1} よりも Z_2^{-1} とした方が合理的である. ゆえに

$$\Delta_\mu(p, p)=Z_3^{-1}\Delta_\mu(p, p; \mathrm{ren}) \tag{55}$$

となる. (33) に (41) と (55) を代入すると,

$$Z_3^{-1}[D_F^{\mathrm{ren}}(p)]^{-1}=-p^2-Z_3^{-1}\int_0^p dk^{\mu}\Delta_\mu(k, k; \mathrm{ren}) \tag{56}$$

を得る. これに (34) すなわち $\Delta_\mu=\Delta^{c}{}_{\mu}-2Ck_\mu$ を代入し, $Z_3\equiv 1+C$ とおくと,

$$[D_F^{\mathrm{ren}}(p)]^{-1}=-p^2-\int_0^p dk^{\mu}\Delta^{c}{}_{\mu}(k, k; \mathrm{ren}) \tag{57}$$

となって D_F^{ren} が紫外発散を含まない量であることがわかる. (証明終)

6-2 j　外線のくりこみ　以上で τ 関数などのくりこみは完了するが, S 行列については外線のとり扱いに関して特別な注意がいる. たとえば電子の外線に関して述べると, Feynman 規則に従って外線には (初期状態に対して) $(2\pi)^{-3/2}\sqrt{m/E_p}\,u_s(p)$ が対応するが, この外線に自己エネルギーの補正をつけ加えたものを形式的に全部足し合せると, $u_s(p)$ を

$$S_F'(p)(m-\gamma p)u_s(p) \tag{58}$$

におきかえることになる. この式に (36) と (53) を代入すると, (53) の最後の項は $(m-\gamma p)^2$ という因子をもつから Dirac 方程式 $(m-\gamma p)u_s(p)=0$ により無視できて,

$$\frac{Z_2}{m-\gamma p-i\varepsilon}(m-\gamma p)u_s(p) \tag{59}$$

のようになるであろう．(59) は $\mathrm{P}(1/x)\cdot x\cdot\delta(x)$ と同様な不定形であるので，

$$Z_2{}^{1/2}u_s(p) \tag{60}$$

に等しいものと定義する．その理由は，S 行列の unitary 性の要請により，外線を 2 つつなぎ合わせたものが 1 つの内線と同じように振る舞うべきであるからである．

同様に光子の外線の補正は $Z_3{}^{1/2}$ とする．そうしてこれらの $Z_2{}^{1/2}$, $Z_3{}^{1/2}$ は (39) により e^{ren} に吸収されてしまう．(39) は内線外線を問わず各頂点に集まる電子の線から $Z_2{}^{1/2}$ を，光子の線から $Z_3{}^{1/2}$ を吸収することを意味しているからである．こうして結局くりこんだ S 行列では，外線の自己エネルギーの補正のことは忘れておいてよいことがわかる．

6-2 k　くりこみ項　以上行なったくりこみによる引き算項をくりこみ項から出してくるには次のようにすればよい．量子電磁力学の Lagrangian 密度は 3-4 の (22) と 3-3 の (1) から

$$\mathcal{L}=-\bar{\psi}(-i\gamma^\mu\partial_\mu+m_0-e\gamma^\mu A_\mu)\psi-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}+B\partial^\mu A_\mu+\frac{1}{2}\alpha B^2 \tag{61}$$

である．

$$\psi=Z_2{}^{1/2}\psi^{\mathrm{ren}} \tag{62}$$

$$A_\mu=Z_3{}^{1/2}A^{\mathrm{ren}}{}_\mu \tag{63}$$

$$B=Z_3{}^{-1/2}B^{\mathrm{ren}} \tag{64}$$

とおき，これらと (39), (42) および $m_0=m-\delta m$ を (61) に代入すると，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}=&-Z_2\bar{\psi}^{\mathrm{ren}}(-i\gamma^\mu\partial_\mu+m-\delta m)\psi^{\mathrm{ren}}+Z_1e^{\mathrm{ren}}\bar{\psi}^{\mathrm{ren}}\gamma^\mu\psi^{\mathrm{ren}}A^{\mathrm{ren}}{}_\mu\\&-\frac{1}{4}Z_3F^{\mathrm{ren}\,\mu\nu}F^{\mathrm{ren}}{}_{\mu\nu}+B^{\mathrm{ren}}\partial^\mu A^{\mathrm{ren}}{}_\mu+\frac{1}{2}\alpha^{\mathrm{ren}}(B^{\mathrm{ren}})^2\end{aligned} \tag{65}$$

となる．(61) の ψ, A_μ, B, e, α, m_0 をそのまま ψ^{ren}, $A^{\mathrm{ren}}{}_\mu$, B^{ren}, e^{ren}, α^{ren}, m におきかえて得られる式と (65) との差がくりこみ項 $\mathcal{L}_c$ である．すなわち

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_c\equiv& Z_2\delta m\bar{\psi}^{\mathrm{ren}}\psi^{\mathrm{ren}}+(1-Z_2)\bar{\psi}^{\mathrm{ren}}(-i\gamma^\mu\partial_\mu+m)\psi^{\mathrm{ren}}\\&-(1-Z_1)e^{\mathrm{ren}}\bar{\psi}^{\mathrm{ren}}\gamma^\mu\psi^{\mathrm{ren}}A^{\mathrm{ren}}{}_\mu+\frac{1}{4}(1-Z_3)F^{\mathrm{ren}\,\mu\nu}F^{\mathrm{ren}}{}_{\mu\nu}\end{aligned} \tag{66}$$

で，これらも相互作用項として Feynman 規則を適用すると，無限大の常数 A, B, L, C が相殺されるわけである．

6-3 発散積分の有限化

くりこみをすれば Feynman 積分は収束するはずであっても，引き算をする前には発散しておりそのままでは計算できない．そこでくりこみによらずに Feynman 積分を有限にする方法を講ずることが必要になる．本節では発散する Feynman 積分の ♦有限化 (regularization) のいろいろの方法について解説する．ただし発散積分の有限化とは，明白に収束しており，人為的に導入したパラメーターを含み，そのパラメーターのある極限をとると形式的にもとの発散積分と同じ形になるような積分を考えることをいう．

6-3 a　切断の方法　Feynman 積分の有限化の最も素朴な方法は ♦切断 (cutoff) の方法である．切断とは読んで字のごとく積分の領域の発散の原因となる部分を切り捨ててしまうことである．たとえば，Feynman 積分で積分変数の 4 次元運動量を有限の範囲に限ってしまえば，紫外発散は起こらないはずである．しかしこの方法は計算がやりにくいばかりでなく，Lorentz 不変性を破るのでよくない．これに対し Feynman パラメーター公式で α の原点の近くをとり除くことは Lorentz 不変性をこわさないので，より具合がよい．数学的な考察にはこれが一番便利な方法である．

積分領域を制限することは，被積分関数に θ 関数を掛けることと同じである．そこで θ 関数のジャンプをなくしなめらかに 0 にいくようにする方が自然であると考えられる．こういう考え方からよく用いられるのは，♦Feynman の切断法 (Feynman cutoff) である．これは Feynman 伝播関数の

$$1/(m^2-p^2-i\varepsilon) \tag{1}$$

の部分を

$$\frac{1}{m^2-p^2-i\varepsilon}\left[\frac{\Lambda^2-m^2}{\Lambda^2-p^2-i\varepsilon}\right]^k \tag{2}$$

のような式におきかえることである．ここに k は一定の正の整数で，普通は $k=1$ とおく．Λ は ♦切断パラメーター (cutoff parameter) で，$\Lambda\to\infty$ のとき (2) は (1) に帰着する．(2) は分母の次数が $2k$ だけ上がるので，Feynman 積分の収束性がそれだけよくなる．しかし，伝播関数の数を増やしたのと同じだから，計算は面倒になる．

6-3 b　regulator の方法　(2) で $k=1$ の場合は

$$\frac{1}{m^2-p^2-i\varepsilon}-\frac{1}{\Lambda^2-p^2-i\varepsilon} \tag{3}$$

と書き直すことができる．スカラー粒子や Feynman ゲージの光子の場合，(3) はもともとの Feynman 伝播関数に質量 Λ の仮想的な Feynman 伝播関数がつけ加わったものと解することができる．ただし後者は符号がマイナスになっているから，これを場の量子論的に導こうと思うと交換関係の符号を普通と逆にしなければならない．つまり負ノルムをもつ粒子 (ghost) を考えなければならない．実際もとの場と全く同じ形の相互作用をもつような質量 Λ の場を導入し*，不定計量の Hilbert 空間で量子化すると，(3) のような形に伝播関数が組み合されることが証明できる．このような場を •regulator という．

量子電磁力学では，電磁場と全く同じ形の相互作用をもつ質量 Λ の A_μ と反対のノルムの中性ベクトル場を regulator として導入すると，c 数のゲージ不変性を破ることなく 2 次の光子の自己エネルギー以外の S 行列に現われるすべての紫外発散を除去することができる．

電子のようなスピノル場 ψ については，(2) を忘れて regulator の方も同じようなスピノル場 ψ_Λ であるとすれば，同じようにやれる．もう少し詳しくいえば，ψ_Λ の相互作用はもとの Lagrangian 密度で ψ を $\psi+\psi_\Lambda$ におきかえることによって導入されるものとすればよい．ところが相互作用 Lagrangian 密度は $\bar{\psi}$ と ψ の両方を含んでいるため，この処法ではどうしても質量の異なるスピノル場の積を含む $\bar{\psi}\gamma_\mu\psi_\Lambda A^\mu$ や $\bar{\psi}_\Lambda\gamma_\mu\psi A^\mu$ のような項がでてきてしまう．これは第 2 種ゲージ不変性に矛盾する．

光子の自己エネルギーのようなループの積分の発散をゲージ不変性を破らないように有限化する方法としては，Bose 統計に従うスピノル場 ψ_Λ を導入するのが便利である．不定計量の Hilbert 空間ではスピンと統計の関係が成立しないので，このような奇妙なことが可能なのである．今度の場合 ψ_Λ は ψ と同じ形で，しかし ψ とは独立に電磁場(およびその regulator) と相互作用するものとする．Feynman 規則に従って ψ の各ループはループ符号因子 (-1) (4-2 h 参照) がつくが，regulator の ψ_Λ の方は Bose 統計に従うのでそれがなく，ループの Feynman 積分を相殺するように働くことになる．

スピンと統計の関係もゲージ不変性も破らずに 2 次の光子の自己エネル

* その自由場の Lagrangian 密度の全体の符号は普通と逆である．

ギーの紫外発散を regulator で除く方法としては，純虚数の電荷を導入する方法がある．これだと 2 次の寄与は符号が逆になるからである．ただしこの方法では，Lagrangian 密度の Hermite 性をこわさないためには，2 つのゼロノルムのスピノル regulator を導入しなければならない．

6-3 c 解析接続の方法 切断の方法が非常に直観的であるのに対し，もっと抽象的なやり方として解析接続を用いる方法がある．この方法の代表的な例を 2 つほどあげておこう．

第 1 の方法は，(1) を

$$1/(m^2-p^2-i\varepsilon)^\lambda \tag{4}$$

におきかえるやり方である．ここで λ は複素数のパラメーターで，$\lambda\to 1$ のとき (1) に戻る．各 Feynman 伝播関数について (1) を (4) におきかえて得られる積分は，$\mathrm{Re}\,\lambda$ が適当に大きければ紫外発散を含まないことは次数勘定定理を拡張してすぐ証明できる．(4) は伝播関数の数を増やさないので計算に便利である．

(4) は見かけ上 (2) と同類のように見えるけれども，重要な相異点があるのである．それは (2) では Λ はいくらでも大きくとることが許されるが，(4) では被積分関数で λ をいくらでも 1 に近づけるというわけにはいかないことである．ここで解析接続の概念が必要になってくる．すなわち (4) のおきかえによって有限化された Feynman 積分の積分を遂行した結果の式は，一般に λ の解析関数で λ に関して積分の収束する $\mathrm{Re}\,\lambda$ の値よりも左の方へ解析接続することが可能である．このとき考えている関数は，λ の複素平面上の任意の有界な領域で有理型である，すなわち極以外の特異点をもたないことが証明できる．つまり分岐点をもたないから解析接続の一意性によって λ を 1 に近づける近づけ方に不定性はないわけである．もちろん $\lambda=1$ では一般に極をもつので，$\lambda\to 1$ の極限自身は発散する．

(4) を用いる方法はゲージ不変性を破る点で不満足である．

6-3 d 複素次元の方法 解析接続による第 2 の例として，時空間の次元 ν を複素数のパラメーターに拡張するという方法がある．もとの運動量表示の Feynman 積分では ν を正の整数以外にすることは考えにくいが，Feynman パラメーター公式 5-1 の (33) を用いるならば，ν を複素数に拡張することは極めて自然に行なえる．そして $\mathrm{Re}\,\nu$ を適当に小さくとっておけば次数勘定定理によって積分の収束は明白である．このやり方を

♦複素次元の方法(dimensional regularization)という．この方法の利点は，伝播関数の数を増やさずにしかもゲージ不変性と矛盾しないでやれることである．ゲージ不変性は時空間の次元数とは無関係な概念だからである．複素次元の方法は最近しばしば用いられるようになってきているので，以下少しこの方法について詳しく説明する．

6-3 e テンソル添字のある量のとり扱い Feynman パラメーター公式の分子には次元に関係する量がいくつか現われる．外線運動量は ν 次元ベクトルであるから，この ν を複素数にするのは変なものである．しかしこれは積分に直接関係のない量であるから形式的に複素次元のベクトルだと思っておくことにする(具体的に ν 次元ベクトルを構成しようと考えなくてもよい)．同様のことは計量テンソル $g^{\mu\rho}$ についてもいえる．ただし

$$g_\mu{}^\mu=\nu \tag{5}$$

であるとする．

これに対し完全反対称擬テンソル(1-3 d 参照)の方はテンソル添字の個数自身が次元数 ν に等しいのだから，これを複素数だと思うことは不可能である．したがって，$\nu=4$ の場合，$\epsilon^{\mu\rho\sigma\tau}$ を含む Feynman 積分に対しては複素次元の方法はうまくいかない．ただし $\epsilon^{\mu\rho\sigma\tau}$ は常数であるから，これを除いた部分については適用できる．そして $\epsilon^{\mu\rho\sigma\tau}$ を含む計算は，たとえばくりこみが完了してから行なうことにすればよい．

ガンマ行列は，もともと 4 次元の場合に定義されたものである．しかし，γ^μ を 4 次の正方行列だと思わずにただ

$$\gamma^\mu\gamma^\rho+\gamma^\rho\gamma^\mu=2g^{\mu\rho} \tag{6}$$

を満足する代数量だと考えれば，ν が複素数になっても矛盾は生じない．(6) の既約表現の行列の次数は，$\nu=2k$ または $2k+1$ のとき 2^k であるが，既約性にこだわらなければ行列の次数は不定である．それゆえ

$$\mathrm{tr}(1)=f(\nu) \tag{7}$$

は決められない．ただし $\nu\to4$ で本来の Feynman 積分に戻るために，

$$f(4)=4 \tag{8}$$

であるものと約束する．

γ^5 は γ^μ で表わすと $\epsilon^{\mu\rho\sigma\tau}$ を含むためやはりとり扱いが厄介である．γ^5 を含むトレースの計算がそのまま遂行できて，その結果がゲージ不変性からの要請を完全に満たすような矛盾のない一般的な Feynman 積分の有限化の方法は，存在しないことが知られている．その反例は γ^μ と $\gamma^5\gamma^\rho$ とを含

む三角形のループ Feynman 積分で，triangle anomaly と呼ばれている．

6-3 f　ν に関する解析性　複素次元の方法が不定性なく用いられるためには，ν に関する解析接続ができてそれが ν に関し有理型関数になることを証明しなければならない．これを次に証明しよう．

5-1 の (33), (39) と $X_{ll'}$ の位相公式 5-2 の (43) から，複素次元の Feynman 積分は

$$\left(\prod_l \int d\alpha_l\right)\left(\prod_l{}' Y_l\right)\left(\prod_{j=1}^{m}\frac{U_{Cj'}}{U}\right)\frac{1}{U^{\nu/2}}\exp\left(-iV-\sum_l \varepsilon_l\alpha_l\right) \qquad (9)$$

のような積分の一次結合として表わされる*．(9) で ν を含むのは U の指数だけである．

6-1 e でやったように積分領域を分割し，6-1 の (12) を満たす部分だけを考察すれば十分である．そこで

$$\alpha_j=\prod_{k=j}^{N}\beta_k \qquad (j=1, 2, \cdots, N) \qquad (10)$$

によって $\alpha_1, \cdots, \alpha_N$ を $\beta_1, \cdots, \beta_N$ に変数変換すると，

$$0\leqq\beta_j=\alpha_j/\alpha_{j+1}\leqq 1 \quad (j=1, \cdots, N-1), \qquad \beta_N=\alpha_N\geqq 0 \qquad (11)$$

である．変換の Jacobian は

$$\frac{\partial(\alpha_1, \cdots, \alpha_N)}{\partial(\beta_1, \cdots, \beta_N)}=\prod_{j=1}^{N}\beta_j{}^{j-1} \qquad (12)$$

である．

6-1 e のように，U の各項を右から左読みの辞書式順序に並べたときの最初の項を $\alpha_{l_1}\alpha_{l_2}\cdots\alpha_{l_\kappa}$ とするとき，

$$R(\beta)\equiv U/\alpha_{l_1}\alpha_{l_2}\cdots\alpha_{l_\kappa}\geqq 1 \qquad (13)$$

は $\beta_1, \cdots, \beta_N$ の関数として多項式になる．なぜなら，6-1 の (26) のところで示したように $\alpha_{l_1}\alpha_{l_2}\cdots\alpha_{l_\kappa}$ は最大の項だからである．また $R^{\nu/2}=\exp\left(\frac{1}{2}\nu\log R\right)$ は (13) により ν について無限遠点を除く全平面で正則である．さらに領域 (11) において，V は $\beta_1, \cdots, \beta_N$ の関数として正則である．なぜなら，V は明らかに有理関数であるが，V の連続性 5-2 の (67) により有界，したがって極をもちえないからである．同様の理由により，Y_l および $\alpha_{l_k}U_{Cj'}/U$ も $\beta_1, \cdots, \beta_N$ に関し正則である．ただし α_{l_k} の k は 6-1 の (17) で定義される番号である．

---

* 積の記号にダッシュをつけたのは，いくつかの l についての積という意味である．

以上により，$\phi(\beta_1, \cdots, \beta_N; \nu)$ を $\beta_1, \cdots, \beta_N$ につき (11) で正則かつ ν につき無限遠点を除いて正則な関数とするとき，

$$I(\nu) \equiv \int_0^\infty d\beta_N \int_0^1 d\beta_{N-1} \cdots \int_0^1 d\beta_1 \frac{\phi(\beta_1, \cdots, \beta_N; \nu)}{\beta_1^{\nu_1}\beta_2^{\nu_2}\cdots\beta_N^{\nu_N}} \tag{14}$$

のような積分の ν に関する解析性を調べればよいことがわかる．ここに $\nu_1, \cdots, \nu_N$ は*

$$\beta_1^{\nu_1}\beta_2^{\nu_2}\cdots\beta_N^{\nu_N} = \left(\prod_{j=1}^{N} \beta_j^{j-1}\right)^{-1} \prod_{k=1}^{\kappa} \alpha_{l_k}^{\frac{1}{2}\nu + m_k - m_{k-1}} \tag{15}$$

と (10) から決まる複素数，すなわち

$$\nu_j \equiv \frac{1}{2}k\nu + m_k - j + 1 \tag{16}$$

である．(16) の右辺の k は，$l_k \leqq j$ であるような最大の k である．(14) はもちろん $\mathrm{Re}\,\nu_j < 1$ $(j=1, 2, \cdots, N)$ を満たすように $\mathrm{Re}\,\nu$ を小さくとれば収束する．a を任意の実数とし，(16) の ν に a を代入したものを $\nu_j(a)$ と書く．そこで $r_j > \nu_j(a) - 1$ $(j=1, 2, \cdots, N)$ なる正の整数 r_j を用意しておく．

まず (14) において β_1 積分に関し r_1 回部分積分する．そうすると $\mathrm{Re}\,\nu_j < 1$ なるゆえ $\beta_1 = 0$ からの寄与がおちて

$$\int_0^1 d\beta_1 \cdot \beta_1^{-\nu_1}\phi = \sum_{s=0}^{r_1-1} (-1)^s \frac{\partial^s\phi/\partial\beta_1^s|_{\beta_1=0}}{\prod_{l=1}^{s+1}(-\nu_1+l)}$$
$$+ (-1)^{r_1} \frac{1}{\prod_{l=1}^{r_1}(-\nu_1+l)} \int_0^1 d\beta_1 \cdot \beta_1^{-\nu_1+r_1} \frac{\partial^{r_1}\phi}{\partial\beta_1^{r_1}} \tag{17}$$

を得る．(17) の右辺の積分は $\mathrm{Re}\,\nu < a$ まで解析接続しても収束する．したがって，(17) を

$$\phi_1(\beta_2, \cdots, \beta_N; \nu) \Big/ \prod_{l=1}^{r_1}(-\nu_1+l) \tag{18}$$

のように書くと，ϕ_1 は β_1 を含まず $\beta_2, \cdots, \beta_N$ について積分領域で正則，ν については $\mathrm{Re}\,\nu > a$ で正則である．それゆえ $\int_0^1 d\beta_2 \cdot \beta_2^{-\nu_2}\phi_1$ に関しても β_1 のときと全く同じように変形できる．これをくり返しすすめていくと

$$I(\nu) = \int_0^\infty d\beta_N \cdot \beta_N^{\nu_N}\phi_{N-1}(\beta_N; \nu) \Big/ \prod_{j=1}^{N-1}\prod_{l=1}^{r_j}(-\nu_j+l) \tag{19}$$

---

* m_k の定義は 6-1 e を見よ．

に到達する．β_N についての積分で事情が異なるのは積分の上限だけだが，因子 $e^{-\varepsilon_N \beta_N}$ を含むから $\beta_N \to \infty$ の寄与は無視できる．したがって同じ議論により結局，$\phi_N(\nu)$ を ν について $\mathrm{Re}\,\nu < a$ で正則な関数とするとき，

$$I(\nu) = \phi_N(\nu) \Big/ \prod_{j=1}^{N} \prod_{l=1}^{r_j} (-\nu_j + l) \tag{20}$$

と書けることがわかる．すなわち $I(\nu)$ は有理型関数である．(証明終)

なお (20) と (16) から，$I(\nu)$ の極は分母が κ を超えない分数で書けるような実軸上の点のみであることがわかる*.

6-3 g　有限部分　発散積分の有限化に関連して，それと混同しやすい概念として発散積分の ♦有限部分 (finite part) がある．これは発散積分に有限な値を定義するものであり，勝手なパラメーターを含んでいてはならない．その最もよく知られた例は 1-1 i で述べた Cauchy の主値である．Pf $1/x^m$ はその拡張であり，$\int_a^b dx\,\varphi(x)/x^m$ $(a<0<b)$ という発散積分の有限部分を定義する．

別な例としてガンマ関数

$$\Gamma(\zeta) = \int_0^\infty dx\, x^{\zeta-1} e^{-x} \tag{21}$$

を考えてみよう．この積分は明らかに $\mathrm{Re}\,\zeta > 0$ のときのみ収束する．しかしながら，(21) は $\zeta = 0, -1, -2, \cdots$ を除く ζ 平面に解析接続できて有理型関数 $\Gamma(\zeta)$ を与える．そこで積分 (21) の $\mathrm{Re}\,\zeta \leqq 0$, $\zeta \neq 0, -1, -2, \cdots$ における有限部分を解析接続によって得られた $\Gamma(\zeta)$ の値によって定義するのが自然であろう．このように解析接続は有限部分の定義の有力な方法である．

ところが除外点 $\zeta = 0, -1, -2, \cdots$ では解析接続によってもまだ無限大であって，有限の値を得ることができない．しかしこれらの点は極であるから，Laurent 展開 (1-1 の (9) 参照) が可能である．たとえば $\zeta = 0$ のまわりでは

$$\Gamma(\zeta) = \zeta^{-1} + \Gamma'(1) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \zeta^n \tag{22}$$

と展開される．(22) で $\zeta = 0$ のときの発散項 ζ^{-1} を捨ててしまえば，$\zeta \to 0$ の極限値 $\Gamma'(1)$ が確定する．一般に，$f(\zeta)$ を ζ の有理型関数とするとき，$f(a)$ の有限部分を $f(\zeta)$ の $\zeta = a$ のまわりの Laurent 展開の 0 次の項

---

* 極の位置は $\kappa \geqq 2$ では必ずしも整数値のみではないことに注意せよ．

$$c_0 \equiv \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - a}d\zeta \tag{23}$$

(C は a のまわりの微小円を反時計まわりに一周する積分路)で定義することができる．これを ♦Riesz (リース) の有限部分という．

さて上に示したように，Feynman 積分を複素次元 ν を用いて有限化したものは ν の有理型関数であるから，Riesz の有限部分の定義を用いてその $\nu=4$ における有限部分を定義することが可能である．しかしながら，この有限部分の定義はあまり有用ではない．それは $[I(\nu)]^2$ の有限部分は一般に $I(\nu)$ の有限部分の 2 乗に等しくないためである．この両者がくい違う理由は，$[I(\nu)]^2$ では $I(\nu)$ の Laurent 展開の (-1) 次の項と 1 次の項との積なども その 0 次の項として寄与するからである．

くりこみも発散項を捨てる操作であるから，ある種の有限部分であると考えられる．ただし物理的質量 m やくりこまれた電荷 e^{ren} のようなパラメーターを導入する部分，いわゆる ♦有限くりこみ (finite renormalization) の部分を除いた，本当に発散除去に関連する操作だけを問題にしての話である (次節参照)．しかしくりこみは，Riesz の有限部分とは違って，たとえば improper な自己エネルギー $(\Sigma^{(*)})^2$ についてくりこみを行なったものは，くりこまれた proper な自己エネルギー $\Sigma^{(*)}$ の 2 乗に等しい．くりこみのこの性質は 1 変数の解析関数による Riesz の有限部分の方法では決して再現することができない．しかし (1) を (4) におきかえる方法で，もし λ を各内線ごとに異なる複素変数とし多変数の解析関数と考えるならば，くりこみのこの性質を保つようにすることが可能である．実際この方法で，有限くりこみを除いてくりこみが再現できることが証明されている．

6-4 くりこまれた Feynman 積分の収束の証明

6-2 において，Feynman 積分の紫外発散はくりこみ可能な理論ではくりこみによってすべて除かれるはずであることを示した．しかしこの推論は次数勘定定理の内容を運動量表示の Feynman 積分で解釈した結果に立脚した直観的な議論であって，厳密な意味での証明になっていない．紫外発散を全部引き算してしまった Feynman 積分が本当に収束することは，決して自明なことではないのである．

本節ではくりこまれた Feynman 積分がたしかに収束することの厳密な証明を与える．この証明は次のように2段に分けて行なう．第1段では，発散する Feynman 積分の有限部分を定義する R 演算という操作を定義し，R 演算をほどこされた Feynman 積分がつねに収束することを証明する．第2段では，R 演算を変形しそれを有限くりこみと組み合せると，6-2 で考えたようなくりこみ項に基づくくりこみが形式的に再現されることを示す．

6-4 a　R 演算の定義　くりこみに用いる処法は，要するに被積分関数を外部変数のベキ級数に展開してそのはじめの数項を引き算したものを考えることである．引き算した結果は，多変数関数 $F(x_1, \cdots, x_r)$ に関する剰余項の公式

$$F(x_1, \cdots, x_r)-\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{j!}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^j F(\xi x_1, \cdots, \xi x_r)\Big|_{\xi=0}$$
$$=\int_0^1 d\xi\frac{(1-\xi)^k}{k!}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^{k+1}F(\xi x_1, \cdots, \xi x_r) \qquad (1)$$

を用いると，1つの項にまとめられる．公式 (1) の成立することは，k について数学的帰納法を用い，右辺を部分積分することによってすぐ証明できる．

H を弧立頂点を含まない，すなわち H のどの内線の端点にもなっていないような頂点を含まない G の任意の部分 Feynman 図とする．G に対応する運動量表示の Feynman 積分の被積分関数 Ψ を，H の外線運動量 $p_1, \cdots, p_r$ の関数とみて公式 (1) を適用すると，

$$\Psi(p_1, \cdots, p_r)-\sum_{j=0}^{d_H}\frac{1}{j!}\left(\frac{\partial}{\partial\xi_H}\right)^j\Psi(\xi_H p_1, \cdots, \xi_H p_r)\Big|_{\xi_H=0}$$
$$=\int_0^1 d\xi_H\frac{(1-\xi_H)^{d_H}}{d_H!}\left(\frac{\partial}{\partial\xi_H}\right)^{d_H+1}\Psi(\xi_H p_1, \cdots, \xi_H p_r) \qquad (2)$$

となる．ここに d_H は 6-1 の (2) で定義した H に対する見かけの発散の次数である*．$d_H<0$ のときは引き算はしないものとする．こうすると (2) は H から生ずる紫外発散を含まないはずである．つまり H のすべての外線運動量を ξ_H 倍して

$$\int_0^1 d\xi_H\frac{(1-\xi_H)^{d_H}}{d_H!}\left(\frac{\partial}{\partial\xi_H}\right)^{d_H+1} \qquad (3)$$

* $|H|$ が回路の合併でない場合にも形式的にその定義を拡張する．

という線形演算子を作用させればよい．この演算を $1-\mathfrak{T}_H$ で表わす．もちろん1は(2)の左辺第1項に対応し，$\mathfrak{T}_H$ は引き算項に対応するものである．そこで *R 演算 (R-operation) $\mathfrak{R}$ を

$$\mathfrak{R}\equiv\prod_H(1-\mathfrak{T}_H) \qquad (4)$$

で定義する．ここに積は $d_H\geqq 0$ なるすべての H についてとるものとする．実際は $|H|$ がある条件を満たすような回路の合併である場合だけをとれば十分なのであるが，その形への還元はあとから論ずることにする．

さて，H の外線は G の外線であることも内線であることもあるので，このままではとり扱いが不便である．そこで H の積分運動量の方も $k_l=\xi_H\hat{k}_l$ $(l\in H)$ のように変数変換する(5-1 a 参照)．変換の Jacobian は $\xi_H{}^{\nu\kappa_H}$ に等しい(κ_Hは H の連結度)．こうすると，H の各内線の運動量は完全に ξ_H 倍された形になる．換言すれば，5-1 の(15),(16)において $l\in H$ なる α_l を，$m_l{}^2$ にかかる部分はそのままにしておいて，$(k_l+q_l)^2$ にかかる部分だけを $\xi_H{}^2$ 倍すること，および $l\in H$ の D_l を $\xi_H{}^{-1}$ 倍することによって表わされる．

以上の操作をすべての H について行なうと，まず $F(D)$ のない場合，Feynman パラメーター公式 5-1 の(33)は次のようになる．

$$c_\nu\Big(\prod_l\int_0^\infty d\alpha_l\Big)\Big[\Big(\prod_H\xi_H{}^{2\kappa_H}\Big)\Big/\bar{U}\Big]^{\nu/2}\exp i\Big[\bar{Q}-\sum_l\alpha_l(m_l{}^2-i\varepsilon_l)\Big] \qquad (5)$$

ここに

$$\bar{\alpha}_l\equiv\alpha_l\prod_{H\ni l}\xi_H{}^2 \qquad (6)$$

で，バーをつけた関数は，すべてバーをつけない関数からその中に含まれる α_l をすべて $\bar{\alpha}_l$ におきかえて得られるものとする．Q はもちろん 5-2 の(54)で定義される量であるから，5-2 の(25)により

$$\bar{Q}=\bar{U}^{-1}\sum_S\bar{W}_S\Big(\sum_l\begin{bmatrix}S\\l\end{bmatrix}q_l\Big)^2 \qquad (7)$$

と書ける．なお，5-2 の(64)から明らかなように $\bar{U}/\prod_H\xi_H{}^{2\kappa_H}$ は ξ_H に関する多項式で，そのどの ξ_H を単独に0とおいても0にはならない．

次に $F(D)$ を作用させた場合を考えよう．5-1 の(35),(37)の Y_l, $X_{ll'}$ の定義には分母にバーのつかない α_l, $\alpha_{l'}$ が現われるから，これを $\bar{\alpha}_l$, $\bar{\alpha}_{l'}$ に書き直すことと，上述のように各 D_l に $\prod_{H\ni l}\xi_H{}^{-1}$ がかかることを考慮すると，結局普通の Feynman パラメーター公式における Y_l, $X_{ll'}$ をそれ

それ

$$\Big(\prod_{H\ni l}\xi_H\Big)\bar{Y}_l, \qquad \Big(\prod_{H\ni l}\xi_H\Big)\Big(\prod_{H\ni l'}\xi_H\Big)\bar{X}_{ll'} \tag{8}$$

におきかえればよいことがわかる．こうしてすべての $d_H \geqq 0$ なる H に関して (3) を作用させるのが，Feynman パラメーター公式に対する R 演算である．

6-4 b　スカラー場理論の場合　一般の場合は非常に記述が複雑になるので，話を簡単にするために以下本節では $\nu=4$ でかつスカラー場のみの場合，すなわち $F(D)$ のない場合のみを考察することにする．このとき (5) は $\xi_H{}^2$ のみの関数（つまり ξ_H の偶関数）だから $\xi_H{}^2=\zeta_H$ とおくのが便利である．このとき (6) は

$$\bar{\alpha}_l \equiv \alpha_l \prod_{H\ni l}\zeta_H \tag{9}$$

となる．また $\nu=4$ だから見かけの発散の次数の定義により，

$$d_H=2\omega_H, \qquad \omega_H \equiv 2\kappa_H - N_H \tag{10}$$

である．(3) はベキ級数の剰余項を与える演算子だから，$\xi_H{}^2=\zeta_H$ の関数に対しては

$$\int_0^1 d\zeta_H \frac{(1-\zeta_H)^{\omega_H}}{\omega_H!}\Big(\frac{\partial}{\partial\zeta_H}\Big)^{\omega_H+1} \tag{11}$$

と書き直せる．

以上により，スカラー場理論の場合の R 演算をほどこした Feynman パラメーター公式は，

$$\begin{aligned}\Re I \equiv \frac{i^{N-2\kappa}}{(4\pi)^{2\kappa}}\Big(\prod_H \int_0^1 d\zeta_H\Big)\Big[\prod_H \frac{(1-\zeta_H)^{\omega_H}}{\omega_H!}\Big]\Big(\prod_l \int_0^\infty d\alpha_l\Big)\Big[\prod_H\Big(\frac{\partial}{\partial\zeta_H}\Big)^{\omega_H+1}\Big] \\ \times\Big(\prod_H \zeta_H{}^{2\kappa_H}\Big)\bar{U}^{-2}\exp i\Big[\bar{Q}-\sum_l \alpha_l(m_l{}^2-i\varepsilon_l)\Big]\end{aligned} \tag{12}$$

である．ただし α の積分と ζ の微分との順序を交換した．

［定理］ $\varepsilon>0$ を固定するとき，$\Re I$ は絶対収束する．（ゆえに (12) は積分の順序には無関係である．）

くりこまれた Feynman 積分が (12) のように閉じた形で表わされることは，とくに注目に値する．従来行なわれてきたように無限大の引き算ということをあらわにやると，それを計算したり数学的に評価したりするためには，必ずいったん Feynman 積分を有限化し，くりこみをしてから有限化のときに人為的に導入したパラメーターをとり除く極限操作または解析接続をやらねばならない．切断などを導入すると，元の Feynman 積分

のもっている解析性や対称性をこわすことが多い．また解析接続による方法の場合には，くりこまれた Feynman 積分は本当の意味での積分にならないから絶対値の評価などできない．(12) は $\alpha\geqq\delta>0$ のように積分領域を切断により有限化し，ζ 微分と α 積分の順序交換ののち $\delta\to 0$ の極限をとったものであると考えることができるが，(12) では δ はすでに姿を消しているので，有限化の操作をあらわにやらなくても直接くりこんだ結果が与えられている．またパラメーターの解析接続を含まないから，積分を直接評価することが可能である．

6-4 c 収束の証明 さて，上の定理を証明しよう．

$$0\leqq(1-\zeta_H)^{\omega_H}\leqq 1, \qquad |\exp(-i)\sum_l \alpha_l m_l^2|=1 \tag{13}$$

であるから，絶対収束を証明するさい (12) でこれらの因子を省いてもよい．また 6-1 d の補助定理により α 積分の上限を a にし $\exp(-\sum_l \varepsilon_l\alpha_l)$ を省いてもよい (その正確な意味は下の (20), (21) を見よ).

被積分関数は α よりもむしろ $\bar{\alpha}$ の関数の形で書けているから，$\bar{\alpha}$ を積分変数にする方が便利である．すなわち α 積分記号下で ζ をパラメーターとみて，各 l につき

$$\bar{\alpha}_l=\alpha_l' \tag{14}$$

のような変数変換を行なう．このときの Jacobian は (9) から

$$\partial(\alpha)/\partial(\alpha')=\Big(\prod_l\prod_{H\ni l}\zeta_H\Big)^{-1}=\prod_H\zeta_H^{-N_H} \tag{15}$$

である．また (12) の微分演算子 $\partial/\partial\zeta_H$ は偏微分法の公式により

$$\frac{\partial}{\partial\zeta_H}+\sum_l\frac{\partial\bar{\alpha}_l}{\partial\zeta_H}\frac{\partial}{\partial\alpha_l'}=\frac{1}{\zeta_H}\Big(\zeta_H\frac{\partial}{\partial\zeta_H}+\sum_{l\in H}\alpha_l'\frac{\partial}{\partial\alpha_l'}\Big) \tag{16}$$

に書きかえなければならない．

α' で書き表わしてしまうと，微分記号下の ζ の関数は $\prod_H\zeta_H^{2\kappa_H}$ のみとなるから，斉次式の満たす偏微分方程式を用いてすぐに計算できる．

$$\begin{aligned}&\Big[\frac{1}{\zeta_H}\Big(\zeta_H\frac{\partial}{\partial\zeta_H}+\sum_{l\in H}\alpha_l'\frac{\partial}{\partial\alpha_l'}\Big)\Big]^{\omega_H+1}\zeta_H^{2\kappa_H}\\&\qquad=\zeta_H^{2\kappa_H-\omega_H-1}\prod_{s=0}^{\omega_H}\Big(2\kappa_H-s+\sum_{l\in H}\alpha_l'\frac{\partial}{\partial\alpha_l'}\Big)\end{aligned} \tag{17}$$

これに (15) の $\zeta_H^{-N_H}$ を掛けて (10) を用いると，ζ_H のベキは -1 になる．

ゆえに証明すべきことは，

$$\mathscr{D}_H \equiv \prod_{s=0}^{\omega H} (2\kappa_H - s + \sum_{l \in H} \alpha_l \partial/\partial \alpha_l) \tag{18}$$

$$\bar{a}_l \equiv a_l \prod_{H \ni l} \zeta_H \tag{19}$$

とおくとき,

$$\Psi(\zeta; a) \equiv \left(\prod_l \int_0^{\bar{a}_l} d\alpha_l\right) \left| \left(\prod_H \mathscr{D}_H\right) U^{-2} e^{iQ} \right| \tag{20}$$

と

$$R \equiv \prod_H \int_0^1 \frac{d\zeta_H}{\zeta_H} \left(\prod_l \int_0^\infty d\alpha_l\right) \Psi(\zeta; \alpha) \exp(-\sum_l \varepsilon_l \alpha_l) \tag{21}$$

が収束することである*.

(20)の積分のとり扱いは, 6-1 e の次数勘定定理の証明および 6-3 f の ν に関する解析性の証明の手法をそのまま利用する. すなわち, まず 6-1 の (12) のように $\alpha_1, \cdots, \alpha_N$ の大小関係を設定し, 次に 6-3 の (10) の変換で $\beta_1, \cdots, \beta_N$ に関する積分に書き改める. そうすると, 6-3 の (14) を導いたのと全く同じ推論により (ただし $X_{ll'}$ に関係した部分は省き, また $\nu=4$ とおいて), $\Psi(\zeta; a)$ は

$$\Psi_{1\cdots N}(\zeta; a) \equiv \int_0^{\bar{a}_N} d\beta_N \int_0^{b_{N-1}} d\beta_{N-1} \cdots$$
$$\times \int_0^{b_1} d\beta_1 \left| \left(\prod_{j=1}^N \beta_j^{j-1}\right) \left(\prod_H \mathscr{D}_H\right) \frac{\phi(\beta_1, \cdots, \beta_N)}{\prod_{j=1}^N \beta_j^{2k}} \right| \tag{22}$$

に帰着することが証明できる. ただし $\Psi_{1\cdots N}(\zeta; a)$ は $\Psi(\zeta; a)$ の $\alpha_1 \leqq \cdots \leqq \alpha_N$ の部分で,

$$b_j \equiv \min\left[1, \bar{a}_j \Big/ \prod_{i=j+1}^N \beta_i\right] \qquad (j=1, \cdots, N-1) \tag{23}$$

そして $\phi(\beta_1, \cdots, \beta_N)$ は $\beta_1, \cdots, \beta_N$ の正則な関数である. また k は 6-3 f で定義した通り, 辞書式順序での最初の補樹木 $\{l_1, \cdots, l_\kappa\}$ の要素 l_k が j を超えないような最大の番号である.

(22) において $\mathscr{D}_H$ は β に関する微分演算子に書き直しておく必要がある. それは $\beta_1=\alpha_1/\alpha_2, \cdots, \beta_{N-1}=\alpha_{N-1}/\alpha_N$, $\beta_N=\alpha_N$ と偏微分法の公式からすぐ計算できて,

$$\mathscr{D}_H = \prod_{s=0}^{\omega H} \left[2\kappa_H - s + \sum_{j \in H} \left(\beta_j \frac{\partial}{\partial \beta_j} - \beta_{j-1} \frac{\partial}{\partial \beta_{j-1}}\right)\right] \tag{24}$$

---

* 6-1 の (8), (10) 参照.

となる ($\beta_0\partial/\partial\beta_0\equiv0$).

さて，1から j までの続き番号の内線をもつような部分 Feynman 図，すなわち $|H(j)|=\{1, 2, \cdots, j\}$ なる $H(j)$ を考えよう．$\omega_{H(j)}\geqq0$ のとき，H として $H(j)$ を代入すると，(24) の和の部分は $\beta_j\partial/\partial\beta_j$ 以外はすべて相殺されてしまう．k の定義により $l_k\leqq j<l_{k+1}$ なるゆえ，$H(j)$ は $|H_k|=C_1\cup\cdots\cup C_k$ を含み，$G/|H_k|$ のいかなる回路をも含まないから，$H(j)$ の連結度 $\kappa_{H(j)}$ は k に等しい．またもちろん定義から $N_{H(j)}=j$ であるから，

$$\mathcal{D}_{H(j)}=\prod_{s=0}^{2k-j}(2k-s+\beta_j\partial/\partial\beta_j) \tag{25}$$

となる．

(22) において $\prod_H \mathcal{D}_H$ の演算を遂行しよう．(24) からわかるように，$\mathcal{D}_H$ は作用しても β に関する特異性を強めることは決してありえないから，$H\neq H(j)$ のものは忘れておき，$\mathcal{D}_{H(j)}$ だけを考察する．ϕ は $\beta_1, \cdots, \beta_N$ の正則関数で，分母は各 β_j について因子分解しており，かつ $\mathcal{D}_{H(j)}$ は β_j のみに関係するから，各 β_j についてべつべつに論ずることができる．ϕ を β_j の関数としてベキ級数に展開すると

$$\beta_j^{-2k}\phi=\sum_{r=0}^{\infty}c_r\beta_j^{-2k+r} \tag{26}$$

のような Laurent 級数が得られる (c_r は β_j を含まない)．まず $\omega_{H(j)}=2k-j\leqq-1$ のときは，(26) に Jacobian からの因子 β_j^{j-1} がかかれば負ベキの項はなくなる．$\omega_{H(j)}\geqq0$ のときは

$$\mathcal{D}_{H(j)}(\beta_j^{-2k}\phi)=\sum_{r=0}^{\infty}\left[\prod_{s=0}^{2k-j}(r-s)\right]c_r\beta_j^{-2k+r} \tag{27}$$

であるから，$r\leqq2k-j$ の項は係数が 0 になって消失する．それゆえ β_j^{-j+1} からはじまる Laurent 級数になるが，これに β_j^{j-1} がかかると負ベキの項は全部なくなる．つまり (22) の被積分関数の絶対値の中身は $\beta_1, \cdots, \beta_N$ に関し正則である．したがって，とくに $0\leqq\beta_j\leqq1$ ($j=1, \cdots, N-1$), $0\leqq\beta_N\leqq\bar{a}_N$ において被積分関数は連続関数であるから，それはその範囲において $\bar{a}_N$ だけに依存する常数 $P(\bar{a}_N)$ でおさえられる．しかも ϕ の形から明らかなように $P(\bar{a}_N)$ は $\bar{a}_N$ の多項式であるとしてよい．

そこでもとの $\alpha_1, \cdots, \alpha_N$ の変数に戻すと，

$$\Psi_{1\cdots N}(\zeta;a)<P(\bar{a}_N)\int_0^{\bar{a}_N}d\alpha_N\cdots\int_0^{\bar{a}_1}d\alpha_1\frac{\prod_{j=1}^{N}\theta(\alpha_j-\alpha_{j-1})}{\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_N} \tag{28}$$

となる ($\alpha_0\equiv 0$).

$$\frac{\prod_{j=1}^{N}\theta(\alpha_j-\alpha_{j-1})}{\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_N}\leqq\frac{\prod_{j=1}^{N}\theta(\alpha_j-\alpha_{j-1})}{\prod_{j=1}^{N}\alpha_j^{1-1/N}} \tag{29}$$

であるから,

$$\begin{aligned}\Psi_{1\cdots N}(\zeta;a)&<P(\bar{a}_N)\int_0^{\bar{a}_N}d\alpha_N\cdots\int_0^{\bar{a}_1}d\alpha_1\prod_{j=1}^{N}\alpha_j^{-1+1/N}\\&=P(\bar{a}_N)N^N\prod_{j=1}^{N}\bar{a}_j^{1/N}\end{aligned} \tag{30}$$

を得る. $\bar{a}$ は (19) で与えられるから, $\Psi(\zeta;a)$ は $a_1,\cdots,a_N$ の多項式に $\prod_H\zeta_H^{N_H/N}$ を掛けたものでおさえられる. これを (21) に代入すると

$$R<\mathrm{const}\prod_H\left(\int_0^1 d\zeta_H\cdot\zeta_H^{-1+N_H/N}\right) \tag{31}$$

となって, R も収束することがわかる*. (証明終)

6-4 d R 演算の還元 (4) で定義した R 演算は, $\omega_H\geqq 0$ であるような G のすべての内線集合 $|H|$ ($\neq\phi$) にわたっての積を考えているが, これはもちろん余分にとりすぎているので, 実際上は H を必要なものだけに制限する方が便利である. そこで以下で不必要なものをとり除くことを考えよう.

以下の考察では(12)の ζ 微分記号下の関数の ζ に関する解析性が問題となる. 5-2 の(64), (66)からわかるように, $\bar{U}$ や $\bar{W}_S$ の各項での各 ζ_H のベキは少なくとも κ_H である. それゆえ, $\hat{U}\equiv\bar{U}/\prod_H\zeta_H^{\kappa_H}$, $\hat{W}_S\equiv\bar{W}_S/\prod_H\zeta_H^{\kappa_H}$ は ζ の多項式であるから, $\hat{U}$ と $\hat{W}_S$ とで書き表わしておく方が ζ について の解析性を見るのに都合がよい.

[還元 1] $|H'|\supset|H|$ ($H'\neq H$) でかつ $\kappa_{H'}=\kappa_H$ ならば

$$(1-\mathfrak{T}_H)(1-\mathfrak{T}_{H'})=1-\mathfrak{T}_H \tag{32}$$

---

* 一般の $F(D)$ のある場合には, R 演算を一括して行なうと $F(D)$ の中の D についての次数の低い項では引き算のやりすぎになり, ξ 積分の収束の証明がうまくいかない. それで $F(D)$ の各項ごとにべつべつに見かけの発散の次数 d_H を定義して各項で R 演算をほどこすならば, 収束の証明の拡張は容易にできる. d_H をその Feynman 積分全体で共通にすることは, 有限くりこみの段階で調整すればよい (6-4 h 参照).

である．つまり $|H'|$ が回路の合併でないような H' は (4) の積からとり除いてよい．

$\omega_{H'}<0$ なら $\mathfrak{T}_{H'}\equiv 0$ で，(32) は自明の式である．したがって $\omega_{H'}\geqq 0$ とする（以下同様）．(32) は $(1-\mathfrak{T}_H)\mathfrak{T}_{H'}=0$ と書き直せるからこれを証明すればよい．仮定により $\kappa_H=\kappa_{H'}$, $N_H<N_{H'}$ であるから $\omega_H>\omega_{H'}$ である．$|H'|\supset|H|$ かつ $\kappa_H=\kappa_{H'}$ だから，$\hat{U}$ や $\hat{W}_S$ の各項において ζ_H は必ず $\zeta_{H'}$ に伴われている．またもちろん $\hat{U}$ は $\zeta_{H'}=0$ で 0 ではないから，(12) の微分記号下の関数は $f(\zeta_{H'},\zeta_H\zeta_{H'})$ のように書ける．ただし $f(x,y)$ は $x=y=0$ で正則な関数とする．$\mathfrak{T}_{H'}$ はこれの $\zeta_{H'}$ に関するベキ展開の第 $\omega_{H'}$ 項までとり出す操作，すなわち

$$\sum_{j=0}^{\omega_{H'}}\frac{1}{j!}\left(\frac{\partial}{\partial\zeta_{H'}}\right)^j f(\zeta_{H'},\zeta_H\zeta_{H'})\bigg|_{\zeta_{H'}=0} \tag{33}$$

を考えることであるから，その結果は ζ_H に関してたかだか $\omega_{H'}$ 次の多項式である．したがって，ζ_H のベキ展開の第 ω_H 次までの項を捨てる演算である $1-\mathfrak{T}_H$ を作用させると 0 になる．（証明終）

［還元 2］ H_1 と H_2 が共通の頂点をもたないとき，$|H'|=|H_1|\cup|H_2|$ なる部分 Feynman 図 H' は (4) からとり除いてよい*．つまり連結な部分 Feynman 図のみについて R 演算を考えれば十分である．

証明すべきことは

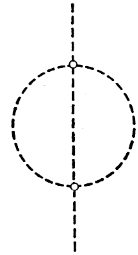
$$(1-\mathfrak{T}_{H_1})(1-\mathfrak{T}_{H_2})\mathfrak{T}_{H'}=0 \tag{34}$$

である．仮定から $\omega_{H'}=\omega_{H_1}+\omega_{H_2}$．今度の場合は $f(\zeta_{H_1}\zeta_{H'},\zeta_{H_2}\zeta_{H'})$ のように書ける関数の $\zeta_{H'}$ に関するベキ展開の第 $\omega_{H'}$ 項までをとり出す操作が $\mathfrak{T}_{H'}$ である．したがって，$\mathfrak{T}_{H'}f$ は ${\zeta_{H_1}}^{k_1}{\zeta_{H_2}}^{k_2}$ $(k_1+k_2\leqq\omega_{H'})$ のような項の一次結合になる．$k_1\leqq\omega_{H_1}$ と $k_2\leqq\omega_{H_2}$ の少なくともどちらか一方は必ず成立するから，(34) が成りたつ．（証明終）

以上により，H として $|H|$ が回路の合併であるような連結な部分 Feynman 図のみをとればよいことがわかった．これは次数勘定定理にでてくる H と同じ条件である．しかしながら，これではまだくりこみ項との対応はうまくいかない．たとえば ϕ^4 相互作用 2-7 の (3) を考えよう．その 2 次の自己エネルギーである 6·11 図は，全体からの 2 次の発散のほかに 3 つの内部からの対数発散を含んでいる．しかしこれらの内部からの

* H_1 と H_2 がただ 1 つの頂点を共有する場合も (34) が成りたつ．しかしこの場合の H' はとり除かないで残しておくのである．

発散を引き算するようなくりこみ項は作れない．実際この場合は，全体からの発散に対する引き算だけで内部からの発散もいっしょにおちてしまうのである（演習問題 6.2 参照）．このことをもっと一般の場合について証明しておく必要がある．



6・11 図

［還元 3］ $|H'|\subset|H|$ $(H'\neq H)$ で，かつ H と H' の頂点が全部一致しているならば (32) が成立する．

これを証明するのは，H' が H より 1 つの内線 l' だけを除いたものである場合，すなわち $H'=H-l'$ の場合に話を限って十分である．なぜなら，一般の場合は 1 つずつ順次内線を除いたものを逐次考えればよいからである．$H'=H-l'$ のとき $\kappa_{H'}=\kappa_H-1$, $N_{H'}=N_H-1$ であるから，$\omega_H>\omega_{H'}$ である．

$\bar{U}$ や $\bar{W}_S$ の各項における ζ_H と $\zeta_{H'}$ は $\alpha_{l'}$ を含まない項では $\zeta_H{}^m\zeta_{H'}{}^m$, $\alpha_{l'}$ を含む項では $\zeta_H{}^m\zeta_{H'}{}^{m-1}$ という因子の形で含まれている．ただし $m\geqq\kappa_H$. ゆえに $\hat{U}$ や $\hat{W}_S$ の各項は ζ_H と $\zeta_{H'}$ を $\zeta_H{}^k\zeta_{H'}{}^{k+1}$ あるいは $\zeta_H{}^k\zeta_{H'}{}^k$ $(k\geqq0)$ という形でのみ含む．さらに $\hat{U}$ は $\zeta_{H'}=0$ で 0 にならないから，(12) の微分記号下の関数は $f(\zeta_{H'}, \zeta_H\zeta_{H'})$ のように書ける．ゆえにあとは還元 1 のときと同じ推論が成りたつ．（証明終）

6-4 e　R 演算の展開　以上により (4) は

$$\mathfrak{R}=\prod_{H\in\mathcal{G}}(1-\mathfrak{T}_H) \tag{35}$$

と還元される．ただし $\mathcal{G}$ は次の 4 つの条件を満たす G の部分 Feynman 図 H 全部の集合である．

0. $\omega_H\geqq0$.
1. $|H|$ は空でない回路の合併である．
2. H は連結．
3. 両端点が H に属する G の内線は必ず $|H|$ に属する．

さて，(35) を展開すると

$$\mathfrak{R}=1+\sum_{s}\prod_{H\in\mathcal{G}_s}(-\mathfrak{T}_H) \tag{36}$$

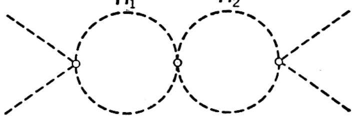
となる．ここに $\mathcal{G}_s$ は $\mathcal{G}$ の空でない部分集合で，和はそのすべてについてとる．くりこみ可能な理論ではさらに次のように書きかえられる*.

---

* くりこみ不可能な理論の場合への拡張はかなり厄介である（巻末文献参照）．

$$\mathfrak{R}=1+\sum_{\{H_1,\cdots,H_m\}}(-\mathfrak{T}_{H_1})\cdots(-\mathfrak{T}_{H_m}) \tag{37}$$

ただし $\{H_1, \cdots, H_m\}$ は，その中のどの 2 つをとってもそれらが頂点を全く共有しないかあるいは一方が他方の部分 Feynman 図になっているような，$\mathcal{G}$ に属する部分 Feynman 図の組とする．つまり直観的にいえば，重複発散に対応する組を含まないということであるが，6·12 図のように $|H_1|\cap|H_2|=\phi$ になっている場合も許さないので，それよりも少しきつい条件である*.



6·12 図

ここではスカラー場理論だけを考察しているから，ϕ^4 相互作用の場合に限って (36) と (37) が相等しいことを証明する．もし H_1 と H_2 が少なくとも 1 つの頂点を共有し，かつどちらも他を含まないならば，$|H_0|\supset|H_1|\cup|H_2|$ であるような適当な $H_0\in\mathcal{G}$ を選ぶと

$$(1-\mathfrak{T}_{H_0})\mathfrak{T}_{H_1}\mathfrak{T}_{H_2}=0 \tag{38}$$

となることを示せばよい．(38) が成立すると，(37) にでてこない (36) の項はすべて相殺するからである．

6-4 f (38) の証明 ϕ^4 相互作用の場合，Feynman 図 H において 6-2 の (4), (5) から $d_H\equiv 2\omega_H=4-r_H$ で，r_H は偶数だから $r_H=2$（自己エネルギー），$r_H=4$（頂点部分）だけが見かけの発散をもつ．H_1 と H_2 が少なくとも 1 つの頂点を共有しかつ互いに他を含まない $\mathcal{G}$ に属する部分 Feynman 図の組であると，もちろん両方ともが自己エネルギーということはありえないから，$1\geqq\omega_{H_1}\geqq 0$, $\omega_{H_2}=0$ としてよい．内線および頂点の集合の意味で H_1 と H_2 の合併，共通部分になっているような部分 Feynman 図をそれぞれ $H_1\cup H_2$, $H_1\cap H_2$ と書く．このとき $H_1\cap H_2$ は連結であるので，縮約図 $H_1\cup H_2/|H_1\cap H_2|$ は $H_1\cap H_2$ に対応する部分を分離頂点とするような Feynman 図である．したがって

$$\kappa_{H_1\cup H_2}-\kappa_{H_1\cap H_2}=(\kappa_{H_1}-\kappa_{H_1\cap H_2})+(\kappa_{H_2}-\kappa_{H_1\cap H_2}) \tag{39}$$

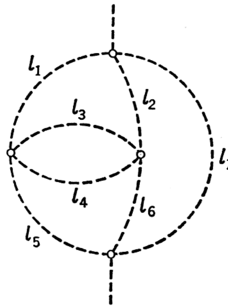
が成立する．これと，内線の数に関する自明の関係式とを組み合せると，

$$\omega_{H_1\cup H_2}=\omega_{H_1}+\omega_{H_2}-\omega_{H_1\cap H_2} \tag{40}$$

が得られる．ところが $H_1\cap H_2$ は，少なくとも H_1 の外線で H_2 の内線で

* $|H_1|\cap|H_2|=\phi$ で H_1 と H_2 が 2 つ以上の頂点を共有することは，$H_1, H_2\in\mathcal{G}$ ならば起こりえない．

ある2本と，H_2 の外線で H_1 の内線である 2 本とを外線とするから，$\omega_{H_1\cap H_2}\leqq 0$ である．したがって，(40) から $\omega_{H_1\cup H_2}\geqq\omega_{H_1}$ を得る．ゆえに $H_1\cup H_2$ は $\mathcal{G}$ の条件 0, 1, 2 を満たす．もし条件3をも満たせば，$H_1\cup H_2\in\mathcal{G}$ だから $H_0=H_1\cup H_2$ とおく．$H_1\cup H_2$ が条件 3 を満たさないときは，頂点を増やさず内線だけをつけ加えて得られる $\mathcal{G}$ に属する部分 Feynman 図が存在するはずであるから，それを H_0 とおく．たとえば 6·13 図で $|H_1|=\{l_1, l_2, l_3, l_4\}$，$|H_2|=\{l_3, l_4, l_5, l_6\}$ とするとき，H_0 は $H_1\cup H_2$ ではなく全体の図である．いずれの場合も $H_0\in\mathcal{G}$，$|H_0|\supset|H_1|\cup|H_2|$ である．



6·13 図

さて，$\hat{U}$ は $\zeta_{H_1}=\zeta_{H_2}=0$ においても 0 にならないので*，(12) の微分記号下の関数は $\mathfrak{T}_{H_1}$, $\mathfrak{T}_{H_2}$ を作用させたとき確定した式になる．この式はもちろん ζ_{H_1} につき ω_{H_1} 次で ζ_{H_2} を含まない式である．$1-\mathfrak{T}_{H_0}$ は ζ_{H_0} に関して ω_{H_0} ($\geqq\omega_{H_1}$) 次までの項を捨てる操作だから，この式が ζ_{H_0} についてたかだか ω_{H_1} 次であることが示されれば，(38) が証明されたことになる．

$\bar{U}$ や $\bar{W}_S$ の各項はある G の内線の集合 M で指定される．$M\cap|H|$ の内線の個数を m_H と書くとき $m_H\geqq\kappa_H$ である．$\bar{U}$ や $\bar{W}_S$ の定義により M で指定される項の ζ_{H_i} $(i=0, 1, 2)$ のベキ指数は m_{H_i} であるから，$\hat{U}$ や $\hat{W}_S$ ではそのベキ指数は $m_{H_i}-\kappa_{H_i}$ となる．ところで (39) を使うと

$$(m_{H_1}+m_{H_2}-m_{H_1\cup H_2})-(\kappa_{H_1}+\kappa_{H_2}-\kappa_{H_1\cup H_2})$$
$$=m_{H_1\cap H_2}-\kappa_{H_1\cap H_2}\geqq 0 \qquad (41)$$

であるから，

$$(m_{H_1}-\kappa_{H_1})+(m_{H_2}-\kappa_{H_2})\geqq m_{H_1\cup H_2}-\kappa_{H_1\cup H_2} \qquad (42)$$

である．また H_0 の定義により $|H_0|-|H_1\cup H_2|$ の内線の数は $\kappa_{H_0}-\kappa_{H_1\cup H_2}$ に等しいから，

$$m_{H_0}-m_{H_1\cup H_2}\leqq\kappa_{H_0}-\kappa_{H_1\cup H_2} \qquad (43)$$

である．(42) と (43) とを組み合せると

$$(m_{H_1}-\kappa_{H_1})+(m_{H_2}-\kappa_{H_2})\geqq m_{H_0}-\kappa_{H_0} \qquad (44)$$

* $H_1\cap H_2$ の補樹木と，$H_1\cup H_2/|H_1\cap H_2|$ の補樹木と，$G/|H_1\cup H_2|$ の補樹木とを合わせてできる G の補樹木に対応する項は $\zeta_{H_1}=\zeta_{H_2}=0$ で 0 にならない．

を得る．ゆえに $m_{H_0}-\kappa_{H_0}>\omega_{H_1}$ であるためには $m_{H_1}-\kappa_{H_1}>\omega_{H_1}$ あるいは $m_{H_2}-\kappa_{H_2}>0$ となり，そのような項は生き残れない．(証明終)

6-4 g ***R* 演算の意味** もとの $1-\mathfrak{T}_H$ の構成をふりかえってみると，$(-\mathfrak{T}_H)$ は運動量表示での Feynman 積分では次の操作である．H が自己エネルギーの場合は，H の外線運動量を p とするとき，p^2 に関する 0 次の項と 1 次の項とを引き算する．H が頂点部分のときは，H の外線運動量をすべて 0 とおいたものを引き算する．これらはもちろん H 内の積分に関しての話であるから，全体の Feynman 図 G から見ると縮約図 $G/|H|$ に対応する Feynman 積分を引き算することになる．ただし H に対応する $G/|H|$ の頂点には，自己エネルギーのときは $A-Bp^2$，頂点部分のときは C を対応させる．ここに A, B, C はいわゆる無限大の常数である．

(37) において H_i と H_j が包含関係にあるときは，$(-\mathfrak{T}_{H_i})(-\mathfrak{T}_{H_j})$ は直接解釈がしにくいので，(37)を少し変形する．まず G の部分 Feynman 図 H (必ずしも $\mathcal{G}$ に属さなくてもよい) に対し次のような演算 $\mathfrak{R}_H$ を定義する．

$$\mathfrak{R}_H=1+\sum_{\{H_1,\cdots,H_k\}}{}'(-\mathfrak{T}_{H_1}\mathfrak{R}_{H_1})\cdots(-\mathfrak{T}_{H_k}\mathfrak{R}_{H_k}) \qquad (45)$$

ただし，$\{H_1,\cdots,H_k\}$ は $\mathcal{G}$ に属するような H の真の部分 Feynman 図の組で，そのどの 2 つをとっても頂点を全く共有しないものとする．和は H のみから成る場合を除いて，そのようなすべての組についてとる．とくに H が $\mathcal{G}$ に属する真の部分 Feynman 図を全く含まない場合には $\mathfrak{R}_H=1$ である．それゆえ (45) により $\mathfrak{R}_H$ は小さいものから順次定義される．したがって，(37) と (45) を比較すれば

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}&=\mathfrak{R}_G && (G\notin\mathcal{G}\ \text{のとき})\\ &=(1-\mathfrak{T}_G)\mathfrak{R}_G && (G\in\mathcal{G}\ \text{のとき})\end{aligned} \qquad (46)$$

であることが数学的帰納法によって示される．

(45), (46)の直観的意味は明瞭である．(45)の右辺の $\mathfrak{R}_{H_j}$ $(j=1,\cdots,k)$ は発散を含む低次の Feynman 図に関する引き算をすませたことを意味する．そして (46) は G 自身が proper な自己エネルギーあるいは頂点部分ならばその次数での引き算をし，そうでなければ G に含まれるより低次の各 proper な自己エネルギーや頂点部分の引き算を行なうことを意味する．これらはすべて G の縮約図に対応するものであるから，$\mathcal{L}_I$ にくりこみ項をつけ加えるとそれから Feynman 規則に従って生成される．

6-4 h 有限くりこみ 以上は $p^2=0$ を基準点としたくりこみであったから，これを $p^2=\mu^2$ のところまでずらさなければならない．これは有限の量のくりこみであるから数学的な問題は一切起こらない．ただ確かめておかなければならないのは，$p^2=0$ でのくりこみをやってから $p^2=\mu^2$ への有限くりこみをやるのと，一気に $p^2=\mu^2$ でくりこみをやるのと結果が同じになるかということである．両者がいつでも一致することは，ベキ級数の次の性質によって保障される．

任意の正則関数 $f(z)$ の $z=a$ におけるベキ展開の k 次の項までをとり出す操作を $\mathfrak{T}_k^a$ と書くと，$k'\geqq k$ ならば

$$(1-\mathfrak{T}_{k'}^b)(1-\mathfrak{T}_k^a)f=(1-\mathfrak{T}_{k'}^b)f \tag{47}$$

が成立する．なぜなら $\mathfrak{T}_k^a f$ は k 次の多項式なるゆえ $\mathfrak{T}_{k'}^b(\mathfrak{T}_k^a f)$ は $\mathfrak{T}_k^a f$ の書きかえにすぎないからである．

いったん無限大のくりこみをすませてしまえば，(47)によって有限くりこみはあとからいくらでも手直しがきくことがわかる．このように基準点を変える操作の全体は可換群をなすことが知られる．これが *くりこみ群 (renormalization group) である．くりこみ群は理論の中に含まれる変数のスケールを変えたときの変化を調べる有力な手段を提供する．

6-5 Heisenberg 表示での考察

6-2 k でくりこみはくりこみ項の形で完全に記述できることを述べた．したがって，摂動展開の各項の紫外発散除去の証明ということをはなれてくりこみの一般的考察を行なうには，Heisenberg 表示で考える方が見通しがよい．本節では量子電磁力学の場合を例にとって Heisenberg 表示でのくりこみについて説明し，Ward-Takahashi (高橋) の関係式に言及する．

6-5 a Heisenberg 方程式 量子電磁力学のくりこみをする前の Heisenberg 方程式は 3-4 の (26) と 3-5 の (2)～(4) から

$$(-i\gamma^\mu\partial_\mu+m_0)\psi=e\gamma^\mu A_\mu\psi \tag{1}$$

$$\Box A_\mu-(1-\alpha)\partial_\mu B=j_\mu\equiv-e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi \tag{2}$$

$$\partial^\mu A_\mu+\alpha B=0 \tag{3}$$

$$\Box B=0 \tag{4}$$

である．これに対し，くりこんだ Heisenberg 演算子 ψ^{ren}, $A^{\mathrm{ren}}{}_\mu$, B^{ren}

の満たす方程式は 6-2 の (65) を変分して得られる次の方程式である*.

$$(-i\gamma^\mu\partial_\mu+m)\psi^{\rm ren}=Z_1Z_2^{-1}e^{\rm ren}\gamma^\mu A^{\rm ren}{}_\mu\psi^{\rm ren}+\delta m\psi^{\rm ren} \tag{5}$$

$$\Box A^{\rm ren}{}_\mu-(1-\alpha^{\rm ren})\partial_\mu B^{\rm ren}=j^{\rm ren}{}_\mu \tag{6}$$

$$\partial^\mu A^{\rm ren}{}_\mu+\alpha^{\rm ren}B^{\rm ren}=0 \tag{7}$$

$$\Box B^{\rm ren}=0 \tag{8}$$

ただし

$$j^{\rm ren}{}_\mu\equiv-Z_1Z_3^{-1}e^{\rm ren}\bar\psi^{\rm ren}\gamma_\mu\psi^{\rm ren}+(Z_3^{-1}-1)\partial_\mu B^{\rm ren} \tag{9}$$

で，それは (8) のおかげで保存則

$$\partial^\mu j^{\rm ren}{}_\mu=0 \tag{10}$$

を満足する．もちろん (5)～(8) は，$\psi^{\rm ren}=Z_2^{-1/2}\psi$, $A^{\rm ren}{}_\mu=Z_3^{-1/2}A_\mu$, $B^{\rm ren}=Z_3^{1/2}B$, $e^{\rm ren}=Z_1^{-1}Z_2Z_3{}^{1/2}e$, $\alpha^{\rm ren}=Z_3^{-1}\alpha$ を代入すれば，(1)～(4) に帰着する．

6-5 b　交換関係　3-5 の (7)～(9) および 3-5 の (13), (14) はくりこんだ演算子に対してもそのままの形で成りたつことは，6-2 の(62)～(64) を代入してすぐ確かめられる．すなわち

$$[B^{\rm ren}(x),\ B^{\rm ren}(y)]=0 \tag{11}$$

$$[A^{\rm ren}{}_\mu(x),\ B^{\rm ren}(y)]=-[B^{\rm ren}(x),\ A^{\rm ren}{}_\mu(y)]=-i\partial^x{}_\mu D(x-y) \tag{12}$$

$$[B^{\rm ren}(x),\ j^{\rm ren}{}_\mu(y)]=0 \tag{13}$$

$$[B^{\rm ren}(x),\ \psi^{\rm ren}(y)]=e^{\rm ren}\psi^{\rm ren}(y)D(x-y) \tag{14}$$

$$[B^{\rm ren}(x),\ \bar\psi^{\rm ren}(y)]=-e^{\rm ren}\bar\psi^{\rm ren}(y)D(x-y) \tag{15}$$

これらの交換関係は連続スペクトルの部分をもたないから，くりこみの影響をうけないことは自然である．3-5 の (28) の Z_3 の定義からも見られるように，場の演算子のくりこみは，相互作用によって生じた連続スペクトルの分だけ離散スペクトル部分の係数が 1 より小さくなるので，それを 1 に戻すように再規格化すなわち re-normalize することだからである．再規格化によりその離散スペクトル部分は最初の自由場の場合と同じ係数に復元するわけである．

3-5 の (33) と 6-2 の (63) から

$$\begin{aligned}\langle 0|[A^{\rm ren}{}_\mu(x),\ A^{\rm ren}{}_\nu(y)]|0\rangle\\ =-i[(g_{\mu\nu}-K\partial^x{}_\mu\partial^x{}_\nu)D(x-y)-(1-\alpha^{\rm ren})\partial^x{}_\mu\partial^x{}_\nu E(x-y)]\\ -i\int_{+0}^\infty d\kappa^2\cdot Z_3^{-1}\sigma(\kappa^2)(g_{\mu\nu}+\kappa^{-2}\partial^x{}_\mu\partial^x{}_\nu)\Delta(x-y;\kappa^2)\end{aligned} \tag{16}$$

* (5) で Ward の関係式 6-2 の (43) を用いれば $Z_1Z_2^{-1}$ は不要である．

を得る.

6-5 c Gupta-Bleuler 形式の困難 Landau ゲージの場合を除いては，ゲージ・パラメーターがくりこみによってαから $\alpha^{\mathrm{ren}}=Z_3{}^{-1}\alpha$ に変わることは Gupta-Bleuler 形式にとって大変都合の悪いことである．もし $\alpha=1$ から出発すると $\alpha^{\mathrm{ren}}\neq1$ となって実際に重要なくりこんだ量のゲージが Feynman ゲージでなくなってしまう．それで通常 $\alpha^{\mathrm{ren}}=1$ ととるが，そうすると $\alpha=Z_3\neq1$ となって自由場の量子化に dipole ghost が必要になり，Gupta-Bleuler 形式は使えない．無理に $\alpha=\alpha^{\mathrm{ren}}=1$ にしようとすると，3-5 の (2) の $\alpha=1$ の場合を使って 3-5 の (8) から得られる式

$$[A_\mu(x),\ \partial^\nu A_\nu(y)]=i\partial^x{}_\mu D(x-y) \tag{17}$$

と，(16) で $\alpha^{\mathrm{ren}}=1$ とおいて得られる式とが矛盾しないためには，$A_\mu=Z_3{}^{1/2}A^{\mathrm{ren}}{}_\mu$ としたのではだめで，

$$A_\mu=Z_3{}^{1/2}A^{\mathrm{ren}}{}_\mu-(1-Z_3)\partial_\mu\hat{\Lambda} \tag{18}$$

のようにゲージの変換もいっしょにやらなくてはならない．ここに $\hat{\Lambda}$ は 3-3 の (112) すなわち

$$\Box\hat{\Lambda}=-\partial^\mu A_\mu \tag{19}$$

を満たす演算子である．しかし 3-3 l で議論したように $\hat{\Lambda}$ は Lorentz スカラーではありえないから，結局 $\alpha=\alpha^{\mathrm{ren}}=1$ とすることは明白な共変性を破ってしまうことになる．

6-5 d Ward-Takahashi の関係式 連続変換に対して不変な理論は，3-4 b で述べたように，Noether の定理により保存電流 j_μ がある．つまり $\partial^\mu j_\mu=0$ である．これは演算子として成りたつ式であるから，左辺に任意個数の場の演算子を掛けてもやはり 0 である．そこでその T 積をとり，真空期待値をとったものもやはり 0 である．このいわばあたりまえの式を少し変形すると極めて有用な関係式が得られる．これらの一連の関係式を ♦Ward-Takahashi の関係式 (Ward-Takahashi identity) と総称する．

例として量子電磁力学の $\langle 0|\mathrm{T}(\phi\bar{\phi}\partial^\mu j_\mu)|0\rangle$ の場合について説明しよう．くりこまない量についてやってもよいが，ここではくりこんだ量について考察することにする．(8) はもともと (6) に ∂^μ を掛けて得られるものであるから，

$$-\Box B^{\mathrm{ren}}=\partial^\mu j^{\mathrm{ren}}{}_\mu \tag{20}$$

と書くべきである．したがって，電流の保存則 (10) は (8) と同内容のも

のである．そこで出発点は (8) から従うあたりまえの式

$$\langle 0|\mathrm{T}[\psi^{\mathrm{ren}}(x)\bar{\psi}^{\mathrm{ren}}(y)\Box B^{\mathrm{ren}}(z)]|0\rangle=0 \tag{21}$$

である．

さて，重要なステップは (21) の □ を真空期待値の外にとり出すことである．このとき空間微分に関しては全く問題ないが，時間微分 $(\partial^z{}_0)^2$ は T 積とは勝手に順序を変えられないことに注意しなければならない．すなわち，たとえば ψ^{ren} と B^{ren} についてみると，

$$\theta(x_0-z_0)(\partial^z{}_0)^2\psi^{\mathrm{ren}}(x)B^{\mathrm{ren}}(z)+\theta(z_0-x_0)(\partial^z{}_0)^2B^{\mathrm{ren}}(z)\psi^{\mathrm{ren}}(x) \tag{22}$$

において θ 関数と $\partial_0{}^2$ との順序交換のさいのおつりをきちんと勘定しなくてはならない．まず ∂_0 を 1 個前に出すと，そのときのおつりは

$$\delta(x_0-z_0)[\psi^{\mathrm{ren}}(x),\ \partial_0B^{\mathrm{ren}}(z)] \tag{23}$$

であるから，(14) によって

$$e^{\mathrm{ren}}\delta^4(x-z)\psi^{\mathrm{ren}}(x) \tag{24}$$

に等しい．次に第 2 の ∂_0 を θ 関数の前に出すと，そのおつりは ψ^{ren} と B^{ren} の同時刻交換子になるから (14) によって 0 である．

同様な考察を $\bar{\psi}^{\mathrm{ren}}$ と B^{ren} についても行なうと，結局 (21) は

$$\begin{aligned}&\Box^z\langle 0|\mathrm{T}[\psi^{\mathrm{ren}}(x)\bar{\psi}^{\mathrm{ren}}(y)B^{\mathrm{ren}}(z)]|0\rangle\\&\quad=e^{\mathrm{ren}}[\delta^4(x-z)-\delta^4(y-z)]\langle 0|\mathrm{T}[\psi^{\mathrm{ren}}(x)\bar{\psi}^{\mathrm{ren}}(y)]|0\rangle\end{aligned} \tag{25}$$

と書き直される．

ところで (25) に出てくる真空期待値は，4-1 g で考察した τ 関数をくりこんだものにほかならない．これらは 4-2 k で注意したように，摂動論では外線部分以外は S 行列と全く同様に計算されるものである．したがって，とくに

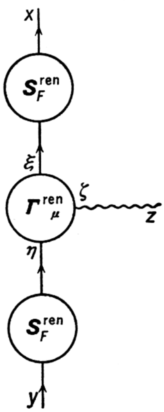
$$\langle 0|\mathrm{T}[\psi^{\mathrm{ren}}(x)\bar{\psi}^{\mathrm{ren}}(y)]|0\rangle=S_F{}^{\mathrm{ren}}(x-y) \tag{26}$$

である．ここに $S_F{}^{\mathrm{ren}}(x-y)$ は 6-2 の (36) で定義した $S_F{}^{\mathrm{ren}}(p)$ と次の関係で結ばれる．

$$S_F{}^{\mathrm{ren}}(x-y)\equiv\frac{-i}{(2\pi)^4}\int d^4pS_F{}^{\mathrm{ren}}(p)e^{-ip(x-y)} \tag{27}$$

(25)の左辺に現われる τ 関数は頂点部分に対応するものである．これを $\Gamma^{\mathrm{ren}}{}_\mu$ と関係づけるためには，proper な部分だけをとり出さなくてはならない(6·14 図参照)．

$$\langle 0|\mathrm{T}[B^{\mathrm{ren}}(\zeta)B^{\mathrm{ren}}(z)]|0\rangle=0 \tag{28}$$



6·14 図

$$\langle 0|\mathrm{T}[A^{\mathrm{ren}}{}_{\mu}(\zeta)B^{\mathrm{ren}}(z)]|0\rangle=-\partial^{\zeta}{}_{\mu}D_F(\zeta-z) \tag{29}$$

であるから，

$$\begin{aligned}&\langle 0|\mathrm{T}[\psi^{\mathrm{ren}}(x)\bar{\psi}^{\mathrm{ren}}(y)B^{\mathrm{ren}}(z)]|0\rangle\\&=\int d^4\xi\int d^4\eta\int d^4\zeta\, S_F{}^{\mathrm{ren}}(x-\xi)e^{\mathrm{ren}}\Gamma^{\mathrm{ren}}{}_{\mu}(\xi-\zeta,\zeta-\eta)\\&\quad\times S_F{}^{\mathrm{ren}}(\eta-y)(-1)\partial^{\zeta,\mu}D_F(\zeta-z)\end{aligned} \tag{30}$$

と表わされることがわかる．ここに

$$\Gamma^{\mathrm{ren}}{}_{\mu}(\xi-\zeta,\zeta-\eta)\equiv\frac{i}{(2\pi)^8}\int d^4p'\int d^4p\ \Gamma^{\mathrm{ren}}{}_{\mu}(p',p)e^{-ip'(\xi-\zeta)-ip(\zeta-\eta)} \tag{31}$$

である．(30) の右辺で z に依存するのは $D_F(\zeta-z)$ のみであるから，(26) と (30) を (25) に代入したとき

$$\Box^z D_F(\zeta-z)=-i\delta^4(\zeta-z) \tag{32}$$

を用いると ζ 積分は直ちに遂行される．したがって結局 (25) は

$$\begin{aligned}&-i\int d^4\xi\int d^4\eta\, S_F{}^{\mathrm{ren}}(x-\xi)\partial^{z,\mu}\Gamma^{\mathrm{ren}}{}_{\mu}(\xi-z,z-\eta)S_F{}^{\mathrm{ren}}(\eta-y)\\&\quad=\delta^4(x-z)S_F{}^{\mathrm{ren}}(z-y)-S_F{}^{\mathrm{ren}}(x-z)\delta^4(z-y)\end{aligned} \tag{33}$$

となる．(33) の Fourier 変換を考えれば，(27), (31) により

$$-(p'^{\mu}-p^{\mu})\Gamma^{\mathrm{ren}}{}_{\mu}(p',p)=[S_F{}^{\mathrm{ren}}(p')]^{-1}-[S_F{}^{\mathrm{ren}}(p)]^{-1} \tag{34}$$

を得る．これが Ward-Takahashi の関係式の最も代表的な式である．(34) は 3-7 のような自発的対称性の破れのある場合にも成立する．

(34) を $p_\nu-p_\nu'$ ($\nu=0,1,2,3$) で割り算して $p_\mu'\to p_\mu$ の極限をとると，

$$(\partial/\partial p_\nu)[S_F{}^{\mathrm{ren}}(p)]^{-1}=-\Gamma^{\mathrm{ren}}{}_{\nu}(p,p) \tag{35}$$

を得る．これは 6-2 の (28) のくりこんだ式にほかならない．

6-6 くりこみ理論による高次補正

くりこみ理論の正しさに決定的な実験的支持を与えたのが，電子およびミュー粒子の異常磁気能率と原子のエネルギー準位における Lamb(ラム) のずれである．本節ではこれらについて (おもに電子の異常磁気能率について) 簡単にふれる．

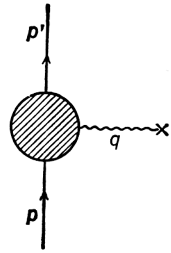
6-6 a 電磁形状因子 電子が，荷電粒子にあまり接近しないで散乱されたとき，あるいは極端に強くない外場で散乱された場合は，1個の光子を交換する Feynman 図だけを考慮すれば十分である．つまり 6·15 図で

表わされるから，くりこみをすませると

$$e^{\mathrm{ren}}\bar{u}(p')\Gamma^{\mathrm{ren}}{}_{\mu}(p', p)u(p) \qquad (1)$$

を考えればよいわけである．ただし $u(p)$ と $\bar{u}(p')$ はそれぞれ初期状態と終状態の電子の波動関数で，スピン添字と係数因子は省略した．これらはもちろん Dirac 方程式

$$(\gamma p-m)u(p)=0, \qquad \bar{u}(p')(\gamma p'-m)=0 \quad (2)$$



6・15 図

を満足する．(2) を用いると (1) がつねに

$$e^{\mathrm{ren}}\bar{u}(p')[\gamma_{\mu}F_1(q^2)-(1/4m)(\gamma_{\mu}\gamma_{\nu}-\gamma_{\nu}\gamma_{\mu})q^{\nu}F_2(q^2)]u(p) \quad (3)$$

と書けることは，Lorentz 共変性とゲージ不変性を使って示すことができる(演習問題 6.4 参照)．ただし $q_{\mu}\equiv p_{\mu}'-p_{\mu}$ とする．$F_1(q^2)$ および $F_2(q^2)$ を *電磁形状因子 (electromagnetic form factor) という．くりこみの定義 6-2 の (51), (49) から

$$F_1(0)=1 \qquad (4)$$

である．これは電子の電荷が e^{ren} であることを表わす．

(3) の第 1 項は (2) を用いると

$$\bar{u}(p')\gamma_{\mu}u(p)=(1/2m)\bar{u}(p')(\gamma_{\mu}\gamma_{\nu}p^{\nu}+\gamma_{\nu}\gamma_{\mu}p'^{\nu})u(p)$$
$$=(1/2m)\bar{u}(p')\left[(p_{\mu}+p_{\mu}')-\frac{1}{2}(\gamma_{\mu}\gamma_{\nu}-\gamma_{\nu}\gamma_{\mu})q^{\nu}\right]u(p) \quad (5)$$

のように書き直される．(5) の第 1 項の $p_{\mu}+p_{\mu}'$ は荷電スカラー粒子のときにでてくるものと同じである．これに対し第 2 項は電子がスピンをもっているために生ずる特有の項で，外場の運動量表示を $A^{\mathrm{ext}}{}_{\mu}(q)$ とすると

$$-\frac{1}{2}(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}-\gamma^{\nu}\gamma^{\mu})q_{\nu}A^{\mathrm{ext}}{}_{\mu}=(1/4i)(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}-\gamma^{\nu}\gamma^{\mu})\cdot(iq_{\mu}A^{\mathrm{ext}}{}_{\nu}-iq_{\nu}A^{\mathrm{ext}}{}_{\mu})$$
$$\equiv s^{\mu\nu}F^{\mathrm{ext}}{}_{\mu\nu} \qquad (6)$$

と書けることからわかるように，スピンと磁場との結合を表わす．すなわち電子は

$$e^{\mathrm{ren}}F_1(0)/2m=e^{\mathrm{ren}}/2m\equiv\mu_0 \qquad (7)$$

という磁気能率をもつ．これは電磁場のある場合の Dirac 方程式の非相対論的な近似から直ちに導かれるよく知られた結果である．

6-6 b 電子の異常磁気能率 (3) の第 2 項は (5) の第 2 項と全く同じ形をもつ．したがって，電子はさらに

$$e^{\mathrm{ren}}F_2(0)/2m=\mu_0F_2(0) \qquad (8)$$

という余分の磁気能率をもつことを意味する．これは場の量子論特有の効

果で，♦異常磁気能率(anomalous magnetic moment)と呼ばれている．電子の全磁気能率は

$$\mu=\mu_0[1+F_2(0)] \tag{9}$$

である．

$F_2(0)$ の摂動展開は2次の項から始まる．2次の proper な頂点部分は6·8図のみである．この図は対数発散を含むがそれは(3)の第1項にのみ関係し，第2項は因子 q^ν のおかげでくりこみなしで収束する．計算は，ガンマ行列の計算が少し面倒なだけで積分は紫外発散も赤外発散も含まないからすぐ遂行できる(演習問題6.5参照)．結果は

$$F_2^{(2)}(0)=\alpha/2\pi \tag{10}$$

である．ただし $\alpha\equiv(e^{\rm ren})^2/4\pi$ は微細構造常数である．

4次の項は，6·9図のほかに6·8図に自己エネルギーの補正をしたもの3つと，頂点部分の補正を加えたもの3つで，都合7つの Feynman 図を計算しなければならない．この計算は相当複雑で，最初に発表されたものは誤りがあった．正しい結果は

$$\begin{aligned}F_2^{(4)}(0)&=\frac{\alpha^2}{\pi^2}\left[\frac{197}{144}+\frac{\pi^2}{12}-\frac{1}{2}\pi^2\log_e 2+\frac{3}{4}\zeta(3)\right]\\&=-0.32848(\alpha/\pi)^2\end{aligned} \tag{11}$$

である．ただし $\zeta(s)\equiv\sum_{n=1}^{\infty}1/n^s$ (Riemann のゼータ関数)．

6次の項は最近になっていくつかのグループで精力的に計算された．寄与する Feynman 図の数は72で，それぞれ数百項から成る有理関数の5重ないし7重の積分で表わされる．しかも紫外発散や赤外発散を含むのでそれらを分離しなければ数値計算ができない．ぼう大な計算の結果得られた値は

$$F_2^{(6)}(0)=(1.195\pm0.026)(\alpha/\pi)^3 \tag{12}$$

である．誤差は電子計算機による計算誤差である*．α の値として

$$\alpha^{-1}=137.03608\pm0.00026 \tag{13}$$

を用いると，理論値は

$$F_2(0)=0.0011596517\pm0.0000000023 \tag{14}$$

である．比較すべき実験値は

$$0.0011596567\pm0.0000000035 \tag{15}$$

---

* 積分計算を解析的に遂行することもかなり進行しており，近いうちに解析的な答も出されるであろう．

であり，実にみごとな一致を示している．ミュー粒子の異常磁気能率についても実験誤差の範囲内(有効数字4桁)で一致している．

6-6 c Lamb のずれ Coulomb ポテンシャルの場合の Dirac 方程式の予言では，2つの束縛状態 $2S_{1/2}$ と $2P_{1/2}$ とは縮退するはずであるが，水素原子のこれらのエネルギー準位は実際には縮退しておらず極めてわずかにずれている．その差の測定値は

$$\Delta E_{2S_{1/2}-2P_{1/2}}=1057.86\pm0.06\,\mathrm{MHz} \tag{16}$$

である*．これを ♦Lamb のずれ (Lamb shift) という．この差はおもに，電子が束縛されて Coulomb 力の中心から有限の距離のところにいるので，$F_1(q^2)$ の q^2 に依存する項がきいてくるために起こるものとして説明される．もちろんこのほかに $F_2(q^2)$ からの寄与や光子の自己エネルギーによる補正，それに束縛状態であることのための効果なども考慮しなければならない．理論値の計算はくりこみ理論を用いて頂点部分の4次の補正まで解析的に遂行された．その数値的な結果は

$$1057.911\pm0.012\,\mathrm{MHz} \tag{17}$$

で，実験誤差の範囲内で(16)と一致している．水素原子の他の束縛状態や，重水素，ヘリウムイオンなどについても理論値と実験値はよく一致している．

6-6 d 量子電磁力学の展望 量子電磁力学は発散の困難を含むので，その誕生のときからその適用限界を見つけようとする試みが執拗になされてきた．そしてたびたび理論と実験の不一致が報告されたが，それらはことごとく計算のミスか実験の間違いであった．現在(1974年)，量子電磁力学の予言と少しでもくい違う信頼のできる実験結果は1つもない．

最近の加速器の発達により，高エネルギーでの量子電磁力学の適用限界の探求も強力にすすめられている．通常その結果は量子電磁力学からの可能なずれを 6-3 の (3) のように Feynman 伝播関数に切断パラメーター Λ をもち込んで表わす習慣になっている**．実験結果と矛盾しない Λ の値は数 GeV*** 以上(詳しくは光子については 20 GeV 以上，電子については 7 GeV 以上と報告されている)ということである．

量子電磁力学は，理論構成の美しさ，含んでいるパラメーターの数の少

* 1 MHz (メガヘルツ)$=4.1355\times10^{-15}$ MeV.

** この方法は S 行列の unitary 性を破るのであまり感心しない．

*** 1 GeV=1000 MeV.

ないこと，実験値を極めて高い精度で予言することにおいて，一般相対論とともに人類のもつ最も輝かしい基礎理論であるといえるであろう.

演習問題 6.

6.1 光子の2次の自己エネルギーの Feynman 積分 $\Pi^{(2)}{}_{\mu\rho}(p)$ を複素次元の方法で計算してゲージ不変性を確かめよ.

6.2 6·11 図の Feynman 積分は，全体からの発散に対する引き算をするだけで内部からの発散もなくなることを，Feynman パラメーター公式で直接確かめよ.

6.3 chiral (カイラル) な相変換 $e^{\gamma_5\theta}$ に関して不変な理論の場合には，6-5 の (14) の代りに

$$[B^{\rm ren}(x),\ \psi^{\rm ren}(y)]=-ie^{\rm ren}\gamma_5\psi^{\rm ren}(y)D(x-y)$$

が成りたつ. これを用いて 6-5 の (34) に相当する Ward-Takahashi の関係式を導け.

6.4 6-6 の (1) がつねに 6-6 の (3) のように書けることを示せ.

6.5 電子の異常磁気能率の2次の項を Feynman パラメーター公式を用いて計算し，6-6 の (10) を確かめよ.

付　　録

A. Lagrange 形式の一般論

Lagrange 形式では Poincaré 群の generator P^{μ}, $M^{\mu\nu}$ が場の演算子の多項式の積分として直接与えられる．もちろんこの議論は形式的であって，量子論に特有なデリケートな問題は一切考えないことにする．

A-1 Lagrangian 密度　場の演算子を一般に $\varphi_{\alpha}(x)$ で表わす．α は 1 つの場の演算子の成分と同時にいくつかの場の演算子の名前をも表わすものとする．α についての和も Einstein の規約に従い $\sum$ を使わない．$\varphi_{\alpha}(x)$ は無限小 Lorentz 変換 $x_{\mu}=x_{\mu}'+\varepsilon_{\mu}{}^{\nu}x_{\nu}'$ に対して，2-3 の (5), (7) で与えたように，

$$\varphi_{\alpha}'(x')=\left[\delta_{\alpha\beta}+\frac{1}{2}i\varepsilon_{\mu\nu}(s^{\mu\nu})_{\alpha\beta}\right]\varphi_{\beta}(x) \tag{1}$$

のように変換する．ここに $s^{\mu\nu}=-s^{\nu\mu}$．2 次以上の無限小を表わす $O(\varepsilon^2)$ は省略する．(1) の左辺を展開すれば

$$\varphi_{\alpha}'(x')=\left[1+\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}(x^{\mu}\partial^{\nu}-x^{\nu}\partial^{\mu})\right]\varphi_{\alpha}'(x) \tag{2}$$

であるから，座標のずれを無視した変化を δ で表わすと

$$\delta\varphi_{\alpha}(x)\equiv\varphi_{\alpha}'(x)-\varphi_{\alpha}(x)=-\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}[(x^{\mu}\partial^{\nu}-x^{\nu}\partial^{\mu})\delta_{\alpha\beta}-i(s^{\mu\nu})_{\alpha\beta}]\varphi_{\beta}(x) \tag{3}$$

である．

さて，Lagrangian 密度 $\mathcal{L}(x)$ は Lorentz スカラー量すなわち

$$\mathcal{L}'(x')=\mathcal{L}(x) \tag{4}$$

であり，かつ $\varphi_{\alpha}(x)$ と $\partial_{\mu}\varphi_{\alpha}(x)$ だけの関数であるとする．したがって，任意の変分に対し

$$\delta\mathcal{L}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_\alpha}\delta\varphi_\alpha+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\varphi_\alpha)}\delta(\partial_\nu\varphi_\alpha) \tag{5}$$

である．それゆえ変分原理

$$0=\delta\int d^4x\,\mathcal{L}(x)=\int d^4x\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_\alpha}\delta\varphi_\alpha+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_\alpha)}\delta(\partial_\mu\varphi_\alpha)\right]$$

$$=\int d^4x\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_\alpha}-\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_\alpha)}\right]\delta\varphi_\alpha \tag{6}$$

から場の方程式

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_\alpha}-\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_\alpha)}=0 \tag{7}$$

が導かれる．

A-2　正準エネルギー運動量テンソル密度

$$\mathcal{T}^{\mu\nu}\equiv\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\varphi_\alpha)}\partial^\mu\varphi_\alpha-g^{\mu\nu}\mathcal{L} \tag{8}$$

を♦正準エネルギー運動量テンソル密度という．(7) を用いると

$$\partial_\nu\mathcal{T}^{\mu\nu}=\partial_\nu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\varphi_\alpha)}\cdot\partial^\mu\varphi_\alpha+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\varphi_\alpha)}\partial_\nu\partial^\mu\varphi_\alpha-\partial^\mu\mathcal{L}$$

$$=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_\alpha}\partial^\mu\varphi_\alpha+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\varphi_\alpha)}\partial^\mu(\partial_\nu\varphi_\alpha)-\partial^\mu\mathcal{L} \tag{9}$$

であるから，(5) により

$$\partial_\nu\mathcal{T}^{\mu\nu}=0 \tag{10}$$

を得る．

次に♦角運動量テンソル密度を

$$\mathcal{M}^{\mu\nu\sigma}\equiv x^\mu\mathcal{T}^{\nu\sigma}-x^\nu\mathcal{T}^{\mu\sigma}-i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma\varphi_\alpha)}(s^{\mu\nu})_{\alpha\beta}\varphi_\beta \tag{11}$$

によって定義する．もちろん μ と ν については反対称である．(3) と (8) から

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma\varphi_\alpha)}\mathring{\delta}\varphi_\alpha-\varepsilon^\sigma{}_\mu x^\mu\mathcal{L}=-\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}\mathcal{M}^{\mu\nu\sigma} \tag{12}$$

が得られるから

$$-\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}\partial_\sigma\mathcal{M}^{\mu\nu\sigma}=\partial_\sigma\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma\varphi_\alpha)}\cdot\mathring{\delta}\varphi_\alpha+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma\varphi_\alpha)}\partial_\sigma(\mathring{\delta}\varphi_\alpha)-\varepsilon^\sigma{}_\mu x^\mu\partial_\sigma\mathcal{L}$$

$$=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_\alpha}\mathring{\delta}\varphi_\alpha+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma\varphi_\alpha)}\mathring{\delta}(\partial_\sigma\varphi_\alpha)-\varepsilon^\sigma{}_\mu x^\mu\partial_\sigma\mathcal{L} \tag{13}$$

となる．(5) と (4) を用いると

$$-\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}\partial_\sigma \mathcal{M}^{\mu\nu\sigma}=\hat{\delta}\mathcal{L}-\varepsilon^\sigma{}_\mu x^\mu \partial_\sigma \mathcal{L}$$
$$=\mathcal{L}'(x')-\mathcal{L}(x')+\mathcal{L}(x')-\mathcal{L}(x)=0 \tag{14}$$

である．ゆえに

$$\partial_\sigma \mathcal{M}^{\mu\nu\sigma}=0 \tag{15}$$

であることがわかった．

(10), (15) により

$$P^\mu \equiv \int d^3x \mathcal{T}^{\mu 0}(x) \tag{16}$$

$$M^{\mu\nu} \equiv \int d^3x \mathcal{M}^{\mu\nu 0}(x) \tag{17}$$

はそれぞれ時間に依存しないベクトルおよびテンソルである．

A-3 対称エネルギー運動量テンソル密度 $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ は μ と ν に関して一般には対称でない．それゆえ次のようにして対称化する．まず

$$\mathcal{G}^{\mu\nu\sigma} \equiv -i\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma \varphi_\alpha)}(s^{\mu\nu})_{\alpha\beta}\varphi_\beta = -\mathcal{G}^{\nu\mu\sigma} \tag{18}$$

とおき，

$$\mathcal{F}^{\mu\nu\sigma}=-\mathcal{F}^{\mu\sigma\nu} \tag{19}$$

$$\mathcal{F}^{\mu\nu\sigma}-\mathcal{F}^{\nu\mu\sigma}=\mathcal{G}^{\mu\nu\sigma} \tag{20}$$

を満足する $\mathcal{F}^{\mu\nu\sigma}$ を求める．それは

$$\mathcal{F}^{\mu\nu\sigma} \equiv \frac{1}{2}(\mathcal{G}^{\mu\nu\sigma}+\mathcal{G}^{\sigma\nu\mu}-\mathcal{G}^{\mu\sigma\nu}) \tag{21}$$

で与えられる．(15), (11), (10), (18), (20) から

$$0=\partial_\sigma \mathcal{M}^{\mu\nu\sigma}=g^\mu{}_\sigma \mathcal{T}^{\nu\sigma}-g^\nu{}_\sigma \mathcal{T}^{\mu\sigma}+\partial_\sigma \mathcal{G}^{\mu\nu\sigma}$$
$$=\mathcal{T}^{\nu\mu}-\partial_\sigma \mathcal{F}^{\nu\mu\sigma}-(\mathcal{T}^{\mu\nu}-\partial_\sigma \mathcal{F}^{\mu\nu\sigma}) \tag{22}$$

であるから，

$$\Theta^{\mu\nu} \equiv \mathcal{T}^{\mu\nu}-\partial_\sigma \mathcal{F}^{\mu\nu\sigma} \tag{23}$$

とおけば

$$\Theta^{\mu\nu}=\Theta^{\nu\mu} \tag{24}$$

である．また (10) と (19) により

$$\partial_\nu \Theta^{\mu\nu}=0 \tag{25}$$

である．$\Theta^{\mu\nu}$ を ♦対称エネルギー運動量テンソル密度という．

(19) により

$$\int d^3x\, \partial_\sigma \mathcal{F}^{\mu 0\sigma}=\sum_k \int d^3x\, \partial_k \mathcal{F}^{\mu 0k}=0 \tag{26}$$

$$\int d^3x\, x^\mu \partial_\sigma \mathcal{F}^{\nu 0\sigma} = -\sum_k \int d^3x\, x^\mu \partial_k \mathcal{F}^{\nu k0}$$
$$= \sum_k g^\mu{}_k \int d^3x\, \mathcal{F}^{\nu k0}$$
$$= \int d^3x\, \mathcal{F}^{\nu\mu 0} \tag{27}$$

であるから，(20) に注意すると，(16), (17) は

$$P^\mu = \int d^3x\, \Theta^{\mu 0}(x) \tag{28}$$

$$M^{\mu\nu} = \int d^3x [x^\mu \Theta^{\nu 0}(x) - x^\nu \Theta^{\mu 0}(x)] \tag{29}$$

と書き直せる．

A-4 正準量子化 量子化はボゾンとフェルミオンでは異なるので，以下簡単のため φ_α をボゾン場とし，$\mathcal{L}$ は $\partial^\mu \varphi_\alpha$ について 2 次で，2 次の項の係数は逆をもつような量であると仮定する．$\dot{\varphi}_\alpha \equiv \partial^0 \varphi_\alpha$ と書くとき，正準共役量は

$$\pi_\alpha \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_\alpha} \tag{30}$$

で定義される．このとき (7) は

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_\alpha} - \sum_k \partial_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_k \varphi_\alpha)} = \dot{\pi}_\alpha \tag{31}$$

となる．正準交換関係は

$$[\varphi_\alpha(x_0, \boldsymbol{x}),\ \varphi_\beta(x_0, \boldsymbol{y})] = [\pi_\alpha(x_0, \boldsymbol{x}),\ \pi_\beta(x_0, \boldsymbol{y})] = 0 \tag{32}$$
$$[\varphi_\alpha(x_0, \boldsymbol{x}),\ \pi_\beta(x_0, \boldsymbol{y})] = i\delta_{\alpha\beta}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{33}$$

である．仮定により (30) の右辺は $\dot{\varphi}_\alpha$ について 1 次で係数は逆をもつから，$\dot{\varphi}_\alpha$ について解くことができる．それを

$$\dot{\varphi}_\alpha = \Phi_\alpha(\varphi, \partial_k \varphi, \pi) \tag{34}$$

と書く．演習問題 2.1 と同様にして，(32), (33) から

$$[\varphi_\alpha(x_0, \boldsymbol{x}),\ \dot{\varphi}_\beta(x_0, \boldsymbol{y})] = i\frac{\partial \Phi_\beta}{\partial \pi_\alpha}(x_0, \boldsymbol{y})\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{35}$$

$$[\pi_\alpha(x_0, \boldsymbol{x}),\ \dot{\varphi}_\beta(x_0, \boldsymbol{y})]$$
$$= -i\left[\frac{\partial \Phi_\beta}{\partial \varphi_\alpha}(x_0, \boldsymbol{y}) + \sum_k \frac{\partial \Phi_\beta}{\partial(\partial_k \varphi_\alpha)}(x_0, \boldsymbol{y})\partial^y{}_k\right]\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{36}$$

である．同様に，ただし (30) を用いて，

$$[\varphi_\alpha(x_0, \boldsymbol{x}),\ \mathcal{L}(x_0, \boldsymbol{y})] = i\pi_\beta(x_0, \boldsymbol{y})\frac{\partial \Phi_\beta}{\partial \pi_\alpha}(x_0, \boldsymbol{y})\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{37}$$

$$[\pi_\alpha(x_0, \boldsymbol{x}),\ \mathcal{L}(x_0, \boldsymbol{y})]$$
$$=-i\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_\alpha}(x_0, \boldsymbol{y})+\sum_k\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_k\varphi_\alpha)}(x_0, \boldsymbol{y})\partial^{y}{}_k\right]\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$$
$$-i\pi_\beta(x_0, \boldsymbol{y})\left[\frac{\partial\Phi_\beta}{\partial\varphi_\alpha}(x_0, \boldsymbol{y})+\sum_k\frac{\partial\Phi_\beta}{\partial(\partial_k\varphi_\alpha)}(x_0, \boldsymbol{y})\partial^{y}{}_k\right]\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \quad (38)$$

A-5 Poincaré 群の generator 上の結果から

$$[\varphi_\alpha(x_0, \boldsymbol{x}),\ \mathcal{T}^{00}(x_0, \boldsymbol{y})]=[\varphi_\alpha(x_0, \boldsymbol{x}),\ \pi_\beta(x_0, \boldsymbol{y})\dot{\varphi}_\beta(x_0, \boldsymbol{y})-\mathcal{L}(x_0, \boldsymbol{y})]$$
$$=i\dot{\varphi}_\alpha(x_0, \boldsymbol{y})\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \quad (39)$$
$$[\varphi_\alpha(x_0, \boldsymbol{x}),\ \mathcal{T}^{k0}(x_0, \boldsymbol{y})]=[\varphi_\alpha(x_0, \boldsymbol{x}),\ \pi_\beta(x_0, \boldsymbol{y})\partial^k\varphi_\beta(x_0, \boldsymbol{y})]$$
$$=i\partial^k\varphi_\alpha(x_0, \boldsymbol{y})\cdot\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \quad (40)$$
$$[\pi_\alpha(x_0, \boldsymbol{x}),\ \mathcal{T}^{00}(x_0, \boldsymbol{y})]$$
$$=i\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_\alpha}(x_0, \boldsymbol{y})+\sum_l\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_l\varphi_\alpha)}(x_0, \boldsymbol{y})\partial^{y}{}_l\right]\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \quad (41)$$
$$[\pi_\alpha(x_0, \boldsymbol{x}),\ \mathcal{T}^{k0}(x_0, \boldsymbol{y})]=-i\pi_\alpha(x_0, \boldsymbol{y})\partial^{y,k}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \quad (42)$$

である．これから直ちに((41)では部分積分して(31)を用いる)，

$$[\varphi_\alpha(x),\ P^\mu]=i\partial^\mu\varphi_\alpha(x) \quad (43)$$
$$[\pi_\alpha(x),\ P^\mu]=i\partial^\mu\pi_\alpha(x) \quad (44)$$

を得る．また

$$M^{\mu\nu}=\int d^3x[x^\mu\mathcal{T}^{\nu0}-x^\nu\mathcal{T}^{\mu0}-i\pi_\alpha(s^{\mu\nu})_{\alpha\beta}\varphi_\beta] \quad (45)$$

に対し

$$[\varphi_\alpha(x),\ M^{\mu\nu}]=[i(x^\mu\partial^\nu-x^\nu\partial^\mu)\delta_{\alpha\beta}+(s^{\mu\nu})_{\alpha\beta}]\varphi_\beta(x) \quad (46)$$

が証明される．(43)，(46)は 2-3 の(4)，(6)にほかならない．

演習問題2.8の結果を使うと，(43)，(44)から，φ, $\partial^k\varphi$, π の任意の多項式 $F(\varphi, \partial^k\varphi, \pi)$ に対し

$$[F(\varphi, \partial^k\varphi, \pi),\ P^\nu]=i\partial^\nu F(\varphi, \partial^k\varphi, \pi) \quad (47)$$

である．したがって，とくに

$$[\Theta^{\mu0}(x),\ P^\nu]=i\partial^\nu\Theta^{\mu0}(x) \quad (48)$$

である．ゆえに

$$[P^\mu,\ P^0]=i\partial^0\int d^3x\,\Theta^{\mu0}=i\partial^0P^\mu=0 \quad (49)$$

$$[P^\mu,\ P^k]=i\int d^3x\,\partial^k\Theta^{\mu0}=0 \quad (50)$$

$$[M^{\mu\nu}, P^0]=i\int d^3x(x^\mu\partial^0\Theta^{\nu 0}-x^\nu\partial^0\Theta^{\mu 0})$$
$$=i\int d^3x\sum_k(x^\mu\partial^k\Theta^{\nu k}-x^\nu\partial^k\Theta^{\mu k})$$
$$=i\int d^3x\sum_k(-g^{\mu k}\Theta^{\nu k}+g^{\nu k}\Theta^{\mu k})$$
$$=i\int d^3x(\Theta^{\nu\mu}-g^{\mu 0}\Theta^{\nu 0}-\Theta^{\mu\nu}+g^{\nu 0}\Theta^{\mu 0})$$
$$=-ig^{\mu 0}P^\nu+ig^{\nu 0}P^\mu \tag{51}$$
$$[M^{\mu\nu}, P^k]=i\int d^3x(x^\mu\partial^k\Theta^{\nu 0}-x^\nu\partial^k\Theta^{\mu 0})$$
$$=i\int d^3x(-g^{\mu k}\Theta^{\nu 0}+g^{\nu k}\Theta^{\mu 0})$$
$$=-ig^{\mu k}P^\nu+ig^{\nu k}P^\mu \tag{52}$$

となって，Poincaré 群の generator の交換関係のうち 2-2 の (10), (11) が得られる．2-2 の (12) の $[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}]$ だけは一般的に証明することは難しい．なぜなら，φ_α，$\partial^k\varphi_\alpha$，π_α は Lorentz 変換に対する変換性が異なるので，$[F(\varphi, \partial^k\varphi, \pi), M^{\rho\sigma}]$ が一般的に計算できないからである．

文献解説

本書では本文中に一切文献の引用をしなかったので，ここで一括して文献を挙げておく．原論文をいちいち引用するのは大変なので，なるべく単行本や総合報告を主にした．それもまず日本語のものを優先し，なければ英語のものを挙げた．原論文の引用は適当な総合報告が見あたらない場合かあるいは本書で主題となっているテーマにとくに密接に関連するものだけにとどめた．したがって重要論文でも必ずしも引用していない場合がある．

1. 予備知識

解析関数論，線形代数，特殊相対論に関しては非常にたくさんの単行本が出版されているので，とくにあげない．超関数 (distribution)* に関する本はいくつかあるが，代表的なものはやはり

(1.1) シュワルツ：超関数の理論（第 3 版）（岩村・石垣・鈴木訳，岩波書店，1971）．

Lie 群と Lie 環に関して物理学者向きに書かれたものとしては

(1.2) 山内恭彦・杉浦光夫：連続群論入門（新数学シリーズ 18, 培風館, 1960）．

不定計量のベクトル空間に関する数学的な本は極めて少ないが，最近次の本が出版された．

(1.3) J. Bognár: *Indefinite Inner Product Spaces* (Springer-Verlag, Berlin, 1974).

量子力学に関してはもちろんたくさんの教科書があるが，代表として本シリーズのものをあげておく．

(1.4) 山内恭彦：量子力学（新物理学シリーズ 4，培風館，1968），

(1.5) 西島和彦：相対論的量子力学（新物理学シリーズ 13，培風館，1973）．

素粒子物理学に関して，まず実験関係では

(1.6) 山本祐靖：高エネルギー物理学（新物理学シリーズ 14，培風館，1973）．

理論全般の解説としては

(1.7) 武田暁・宮沢弘成：素粒子物理学（物理学選書 9，裳華房，1965），

(1.8) 川口正昭：素粒子論（共立全書 173，共立出版，1969），

(1.9) 湯川秀樹・片山泰久・伊藤大介・田中正：素粒子論（現代物理学の基礎 11，岩波書店，1974）．

とくに，弱い相互作用に関しては

(1.10) 山田勝美・森田正人・藤井昭彦：ベータ崩壊と弱い相互作用（新物理学シリーズ 15，培風館，1974）．

---

* hyperfunction に関しては手頃な入門書がまだない．京都大学数理解析研究所講究録 No. 188 (1973) 参照．

場の量子論関係の参考書は次章のところで書く．分散公式に関してはたとえば

(1.11) G. Barton: *Introduction to Dispersion Techniques in Field Theory* (W. A. Benjamin, New York, 1965).

散乱振幅の解析性のまとめと高エネルギー漸近的振る舞いについては

(1.12) A. Martin and F. Cheung: *Analyticity Properties and Bounds on the Scattering Amplitude* (Gordon and Breach, New York, 1970).

公理論的場の理論の全般的な紹介は

(1.13) ボゴリューボフ他: 場の量子論の数学的方法（江沢・亀井・関根他訳, 東京図書, 1972).

解析的 S 行列理論に関しては，提唱者の著書として

(1.14) G. F. Chew: *S-Matrix Theory of Strong Interactions* (W. A. Benjamin, New York, 1962).

Regge 極理論の最近の総合報告は

(1.15) Y. Hara: Prog. Theor. Phys. Suppl. 51 (1972), 96–228.

双対共鳴模型については

(1.16) G. Veneziano: Physics Reports **9 C** (1974), 199–242.

最近の素粒子論の話題についてはいちいち文献をあげないが，一般向けの紹介は近く雑誌“科学”（岩波書店）に連載される予定．専門的な総合報告は Physics Reports (North Holland, Amsterdam) にいくつかでている．種々の模型や場の量子論の枠を超える試みなどについては，文献 (1.9) にとくに日本の仕事を中心としてかなり詳しく紹介されている．

2. 第二量子化

日本で出版された**場の量子論**に関する単行本のうちかなりのものが絶版になっている．現在書店で買えるものはほとんどが翻訳書である．

(2.1) ハイトラー: 輻射の量子論上, 下（沢田訳, 物理学叢書, 吉岡書店, 1957),

(2.2) ベレステッキー・リフシッツ・ピタエフスキー: 相対論的量子力学 1［ランダウ・リフシッツ］（井上訳, 東京図書, 1969),

(2.3) リフシッツ・ピタエフスキー: 相対論的量子力学 2［ランダウ・リフシッツ］（井上訳, 東京図書, 1972),

(2.4) マンドル: 場の量子論入門（村田訳, 東京図書, 1971),

(2.5) ヘンリー・ティーリング: 初等場の量子論（野上訳, 講談社, 1974),

(2.6) 高橋康: 物性研究者のための場の量子論 I（新物理学シリーズ 16, 培風館, 1974).

場の量子論の包括的な教科書としては

(2.7) S. S. Schweber: *An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory* (Harper & Row, New York, 1961).

1960 年以前の文献はこの本でたいがい調べられる．

個別の話題では，パラ統計に関しては適当な総合報告がないが，次の論文に主要な結論と文献がでている．

(2.8) Y. Ohnuki and S. Kamefuchi: Prog. Theor. Phys. **50** (1973), 258–276.

局所可換性と $j(x)|\mathbf{0}\rangle=0$ から $j(x)\equiv 0$ が従うことの厳密証明は，たとえば

(2.9) R. F. Streater and A. S. Wightman: *PCT, Spin & Statistics and All That* (W. A. Benjamin, New York, 1964)

の p. 139 に与えられている (p. 163 も参照のこと). 一般の Wightman 関数のスペクトル表示については

(2.10) G. Källén and H. Wilhelmsson: Mat. Fys. Skr. Dan. Vid. Selsk. **1** No. 9 (1959), 27 pp.

以上のほか本章関連の詳しいことはたいがい文献 (2.7) にのっている. なお LSZ の原論文は

(2.11) H. Lehmann, K. Symanzik und W. Zimmermann: Nuovo Cimento **1** (1955), 205–224 (ドイツ語)[英訳は L. Klein 編の分散公式と場の理論の論文集 (Gordon and Breach) に収録].

3. 量子電磁力学

量子電磁力学の教科書としては

(3.1) G. Källén: *Quantum Electrodynamics* (Mizushima 英訳, Springer-Verlag, Berlin, 1972),

(3.2) J. M. Jauch and F. Rohrlich: *The Theory of Photons and Electrons* (Addison-Wesley, New York, 1955).

電磁場の Coulomb ゲージでの量子化はたとえば文献 (1.5), Gupta–Bleuler 形式については文献 (2.7) を見よ. なお Gupta と Bleuler の原論文は

(3.3) S. N. Gupta: Proc. Phys. Soc. **A 63** (1950), 681–691,

(3.4) M. Bleuler: Helv. Phys. Acta **23** (1950), 567–586 (ドイツ語).

little group の性質を使って電磁場の共変的量子化に不定計量の必要なことを証明したのは

(3.5) P. M. Mathews, M. Seetharaman and M. T. Simon: Phys. Rev. D **9** (1974), 1706–1710.

電磁場の共変的量子化に非局所的な補助条件が必要なことの証明は

(3.6) R. Strocchi: Phys. Rev. **162** (1967), 1429–1438.

不定計量の場の量子論の総合報告は

(3.7) K. L. Nagy: *State Vector Space with Indefinite Metric in Quantum Field Theory* (P. Noordhoff, Groningen, 1966),

(3.8) N. Nakanishi: Prog. Theor. Phys. Suppl. **51** (1972), 1–95.

Feynman ゲージ以外での**電磁場の共変的量子化**の原論文のうちおもなものは次の通りである. 最初に補助のスカラー場 B を導入して正準形式を拡張したのは

(3.9) R. Utiyama: Prog. Theor. Phys. Suppl. **9** (1959), 19–44.

B をいれた場の方程式の形式的とり扱いをやったものとして

(3.10) J. Schwinger: Phys. Rev. **130** (1963), 402–405.

不定計量の理論として dipole ghost の必要性をはじめて指摘したのは

(3.11) N. Nakanishi: Prog. Theor. Phys. **35** (1966), 1111–1116.

正準形式の場の量子論として定式化したのは

(3.12) B. Lautrup: Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk. **35** No. 11 (1967), 29 pp.

文献 (3.11) と (3.12) を総合したものが文献 (3.8) に与えられている．本書はそれをさらに丁寧に解説したものである．なお gaugeon を用いる形式は

(3.13) K. Yokoyama: Prog. Theor. Phys. **51** (1974), 1956–1970.

Landau ゲージ理論につながる**ベクトル場理論**を提起したのは

(3.14) N. Nakanishi: Phys. Rev. D **5** (1972), 1324–1330.

$m \to 0$ の極限はとれないが，同様な形式を独立に与えたものとして

(3.15) P. Ghose and A. Das: Nucl. Phys. **B 41** (1972), 299–316.

Johnson の定理の原論文は

(3.16) K. Johnson: Nucl. Phys. **25** (1961), 435–437.

Landau ゲージ形式ではこの定理は文献 (3.14) で証明されている．gaugeon を含むベクトル場理論は

(3.17) K. Yokoyama: Prog. Theor. Phys. **52** (1974), 1669–1686.

自発的対称性の破れの考えを明確な形ではじめて場の量子論にもち込んだのは

(3.18) Y. Nambu and G. Jona-Lasinio: Phys. Rev. **112** (1961), 345–358.

Goldstone の定理は文献 (3.18) にも指摘されているが，その一般性を強調し，いわゆる Goldstone 模型を使ってその物理的意味を明らかにしたのは

(3.19) J. Goldstone: Nuovo Cimento **19** (1961), 154–164.

Goldstone の定理の証明は多くの人によっていろいろの方法で与えられている．代表的な総合報告として

(3.20) A. Katz and Y. Frishman: Nuovo Cimento Suppl. **5** (1967) 749–785.

自発的対称性の破れに漸近場を用いる方法は，論文がたくさんあるがたとえば

(3.21) H. Umezawa: Nuovo Cimento **40** (1965), 450–475,

(3.22) R. N. Sen and H. Umezawa: Nuovo Cimento **50** (1967), 53–74.

ゲージ場により Goldstone の定理から逃れられる可能性を指摘した論文は

(3.23) P. W. Higgs: Physics Letters **12** (1964) 132–133

をはじめいくつかある．Higgs 現象を Coulomb ゲージで定式化したのは

(3.24) P. W. Higgs: Phys. Rev. **145** (1966), 1156–1163.

Higgs 現象に関しては多くの論文があるが，Yang-Mills 場を中心としたゲージ理論の総合報告として

(3.25) E. S. Abers and B. W. Lee: Physics Reports **9 C** (1973), 1–141.

Landau ゲージの量子電磁力学をもとにした Higgs 現象の説明は

(3.26) N. Nakanishi: Prog. Theor. Phys. **49** (1973), 640–651,

(3.27) N. Nakanishi: Prog. Theor. Phys. **50** (1973), 1388–1396,

(3.28) K. Nishijima: Prog. Theor. Phys. **50** (1973), 1381–1387.

4. 摂動論

Tomonaga–Schwinger–Feynman–Dyson の理論の原論文のおもなものは

(4.1) 日本物理学会編：量子電磁力学 I，II（新編物理学選集 4, 9）

に収録されている．Feynman–Dyson の摂動論に関しては通常の場の量子論の教科書ならばまずたいがいのっている．超多時間形式，そのとくに微分結合を含む場合のことに関しては

(4.2) 梅沢博臣：素粒子論（みすず書房，1953）

に詳しいが，残念ながら絶版になっている．ただし英語版が North Holland からでている．相互作用 Lagrangian 密度の時間微分の数が自由場のそれに等しいときの effective Lagrangian 密度を最初に与えたのは

(4.3) T. D. Lee and C. N. Yang: Phys. Rev. 128 (1962), 885–898.

量子電磁力学での散乱断面積や Feynman 積分の具体的な計算については，文献 (2.7), (3.1), (3.2) を見よ．外線のくりこみを K 図を用いてきちんと扱った摂動論的なゲージ不変性の証明は

(4.4) I. Bialynicki-Birula: Phys. Rev. D 2 (1970) 2877–2886.

赤外発散の相殺に関しては文献 (3.2) が詳しいが，高次の Feynman 積分についてのとり扱いは誤りである．本書では

(4.5) T. Kinoshita: Prog. Theor. Phys. 5 (1950), 1045–1047

のアイデアをK図を導入して修正一般化した論文

(4.6) N. Nakanishi: Prog. Theor. Phys. 19 (1958) 159–168

の証明を紹介した．赤外部からの寄与を摂動の全次数でまとめてとり出すことを論じたものとして，代表的な論文は

(4.7) D. R. Yennie, S. C. Frautschi and H. Suura: Annals of Physics 13 (1961), 379–452

であるが，この証明は最近簡単化された：

(4.8) G. Grammer, Jr. and D. R. Yennie: Phys. Rev. D 8 (1973), 4332–4344.

次章の Feynman パラメーター公式に基づいた赤外発散の一般論は

(4.9) T. Kinoshita: J. Math. Phys. 3 (1962), 650–677.

なおこの論文では質量が 0 のときにでる発散を一般に質量特異性と呼び，赤外発散より広い概念として一般論を論じている．この用語によれば，文献 (4.6) は質量特異性に関する一般論であり，文献 (4.7), (4.8) は赤外発散だけに関するものである．

5. Feynman 積分の一般論

この章で論じた **Feynman パラメーター公式**に関して，より詳しいことは

(5.1) N. Nakanishi: *Graph Theory and Feynman Integrals* (Gordon and Breach, New York, 1971).

グラフ理論に関する本として代表的なものは

(5.2) ハラリイ：グラフ理論（池田訳，共立出版，1971）．

Feynman の恒等式はもちろん Feynman の原論文（文献 (4.1) にも収録）

(5.3) R. P. Feynman: Phys. Rev. 76 (1949), 769–789

で具体的な計算のためはじめて用いられた．一般の Feynman 積分を Feynman パラメーターの形で論じたのは

(5.4)　R. Chisholm: Proc. Camb. Phil. Soc. **48** (1952), 300–315 [訂正 **48** (1952), 518]

のほか，摂動級数の発散の証明に関連した論文が同じころ 3 つほどでている．

一般化された Feynman の恒等式 4–6 の (37) を用いて，U, V, Y_l, $X_{ll'}$ の**位相公式**を最初に導いたのは

(5.5)　N. Nakanishi: Prog. Theor. Phys. **17** (1957), 401–418 [日本語では素粒子論研究 **12** (1956), 217–229; **13** (1956) 89–104].

ただし V の切断集合表示だけは

(5.6)　Y. Nambu: Nuovo Cimento **6** (1957), 1064–1083

の方法 (5–1 の (14) を用いる) に基づき

(5.7)　K. Symanzik: Prog. Theor. Phys. **20** (1958), 690–702

により与えられた．その証明はいくつか独立になされたが，

(5.8)　Y. Shimamoto: Nuovo Cimento **25** (1962), 1292–1313

においてはじめてグラフ理論的考察が明確な形でとりいれられた．なお Feynman パラメーター公式による高次の Feynman 積分の計算の具体例としては

(5.9)　K. Hiida, N. Nakanishi, Y. Nogami and M. Uehara: Prog. Theor. Phys. **22** (1959), 351–372.

電子の異常磁気能率の 6 次の項の計算に関連して，実用的な計算法を開発した論文として

(5.10)　P. Cvitanović and T. Kinoshita: Phys. Rev. D **10** (1974), 3978–4031 (3 論文).

Feynman 積分の解析性に関する本は，文献 (5.1) のほかに Landau 方程式の解を論じたものとして

(5.11)　R. J. Eden, P. V. Landshoff, D. I. Olive and J. C. Polkinghorne: *The Analytic S-Matrix* (Cambridge University Press, London, 1966).

また homology 論を用いた厳密な考察は*

(5.12)　R. C. Hwa and V. L. Teplitz: *Homology and Feynman Integrals* (W. A. Benjamin, New York, 1966),

(5.13)　F. Pham: *Introduction à L'Étude Topologique de Singularités de Landau* (Gauthier-Villars, Paris, 1967) (フランス語).

Feynman 積分の解析性を一般的にはじめて論じたのは

(5.14)　N. Nakanishi: Prog. Theor. Phys. **22** (1959), 128–144,

(5.15)　L. D. Landau: Nucl. Phys. **13** (1959), 181–192

であるが，前者は Feynman パラメーター公式に基づき V の性質を詳しく調べた．後者は運動量積分を残した形を用いるという巧妙な方法で Landau 方程式を導いた．このほかに J. Bjorken の博士論文にも同様なことがなされた由であるが

* 擬微分方程式を用いる方法はまだ最近いとぐちについたばかりで論文は未発表である．京都大学数理解析研究所講究録 No. 209 (1974), p. 11 参照．

未発表のままのため内容は不明．Feynman 積分の解析性を調べるのにはじめて端点特異性と pinch の考え方 (Hadamard の補助定理) を用いたのは

(5.16) J. C. Polkinghorne and G. R. Screaton: Nuovo Cimento **15** (1960), 289-300.

Cutkosky 規則を提起したのは

(5.17) R. E. Cutkosky: J. Math. Phys. **1** (1960), 429-433.

解析性の一般論に先だち，**異常しきい値**の存在を発見したのは

(5.18) R. Karplus, C. M. Sommerfield and E. H. Wichmann: Phys. Rev. **111** (1958), 1187-1190,

(5.19) Y. Nambu: Nuovo Cimento **9** (1958), 610-623,

(5.20) R. Oehme: Phys. Rev. **111** (1958), 1430-1432.

双対図 (グラフ理論では古くから周知) を Feynman 積分の解析性の研究のために導入したのは

(5.21) R. Karplus, C. M. Sommerfield and E. H. Wichmann: Phys. Rev. **114** (1959), 376-382

で，それを一般化したのは文献 (5.15) と

(5.22) J. C. Taylor: Phys. Rev. **117** (1960), 261-265.

Feynman 積分から導かれるスペクトル表示などの積分表示に関するまとめは，文献 (5.1) と

(5.23) N. Nakanishi: Prog. Theor. Phys. Suppl. **18** (1961), 1-81 [訂正 Prog. Theor. Phys. **26** (1961), 806],

(5.24) I. T. Todorov: *Analytic Properties of Feynman Diagrams in Quantum Field Theory* (Risk 英訳, Pergamon, Oxford, 1971).

6. くりこみ理論

次数勘定定理は，Dyson のくりこみの原論文 (文献 (4.1) にも収録)

(6.1) F. J. Dyson: Phys. Rev. **75** (1949), 1736-1755

ではじめて述べられた．その証明は Feynman パラメーター公式を用いて文献 (5.5) ではじめて与えられた．ただし積分領域の区分を用いた厳密化は

(6.2) N. Nakanishi: J. Math. Phys. **4** (1963), 1385-1392.

運動量表示の Feynman 積分で，4 次元運動量を Euclid ベクトルと仮定した上での次数勘定定理の証明は

(6.3) S. Weinberg: Phys. Rev. **118** (1960), 838-849,

(6.4) Y. Hahn and W. Zimmermann: Commun. Math. Phys. **10** (1968), 330-342.

伝播関数の $-i\varepsilon$ に特殊の工夫をしてこの結果を Minkowski 空間の場合へ変換したのは

(6.5) W. Zimmermann: Commun. Math. Phys. **11** (1968), 1-8.

量子電磁力学で紫外発散がすべて**くりこみ可能なことの証明**の全体的構成を与えたのは文献 (6.1) である．そのうち重複発散の問題については

(6.6) A. Salam: Phys. Rev. **84** (1951), 426-431.

Ward の関係式は文献 (6.1) でも言及されているが，その証明は

(6.7) J. C. Ward: Phys. Rev. **78** (1950), 182.

この考えを応用して重複発散の困難を回避したくりこみ法を提起したのは

(6.8) J. C. Ward: Phys. Rev. **84** (1951), 897-901.

その他くりこみの多くの仕事に関しては，たとえば文献 (2.7) を見よ.

発散積分の有限化で，regulator の考え方を形式的に導入したのは

(6.9) W. Pauli and F. Villars: Rev. Mod. Phys. **21** (1949), 434-444.

不定計量の補助場による regulator を提起したのは

(6.10) S. N. Gupta: Proc. Phys. Soc. **A 66** (1953), 129-138.

純虚数の電荷をもつ補助場を考えたのは

(6.11) T. D. Lee and G. C. Wick: Phys. Rev. D 2 (1970), 1033-1048.

Feynman 積分の有限化に解析接続による方法をはじめてとりいれて一般の場合の有限部分を定義したのは

(6.12) E. R. Speer: J. Math. Phys. **9** (1968), 1404-1410,

(6.13) E. R. Speer: *Generalized Feynman Amplitudes* (Princeton University Press, New Jersey, 1969).

複素次元の方法はいくつか独立に提起されたが，代表的なものは

(6.14) G. 't Hooft and M. Veltman: Nucl. Phys. **B 44** (1972), 189-213.

複素次元の Feynman 積分が Ward の関係式を満足することを一般的に証明したものとして

(6.15) E. R. Speer: J. Math. Phys. **15** (1974), 1-6.

triangle anomaly についての総合報告は

(6.16) S. L. Adler: *Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory*, Vol. 1 (Deser 他編, MIT Press, Massachusetts, 1970), 1-164.

くりこみの厳密証明は最初

(6.17) N. N. Bogoliubov and O. S. Parasuik: Acta Math. **97** (1957), 227-266 (ドイツ語)

により与えられたが，不十分なところがいくつかあったので

(6.18) K. Hepp: Commun. Math. Phys. **2** (1966), 301-326

により完成された. これらでは R 演算は **6-4** の (45) の形で定義されていた. これを BPH renormalization と呼んでいる. もとの Dyson-Salam の方法にもっと忠実なやり方としては

(6.19) W. Zimmermann: Commun. Math. Phys. **15** (1969), 208-234.

また文献 (6.12) の有限部分の方法は有限くりこみを除き BPH と同等である.

Feynman パラメーター公式で直接 R 演算を考えた最初の論文は

(6.20) O. I. Zav'yalov and B. M. Stepanov: Yad. Fiz. **1** (1965), 922-934 [英訳は J. Nucl. Phys. **1** (1965), 658-666].

Feynman パラメーター公式でくりこみをやってその収束を示したのは

(6.21) T. Appelquist: Annals of Physics **54** (1969), 27-61.

BPH の R 演算との関係もこの論文で論じられている. もっと厳密な収束の証明は

(6.22) S. A. Anikin, O. I. Zavialov and M. K. Polivanov: Teor. Mat. Fiz. **17** (1973), 189–198 [英訳は Theor. Math. Phys. **17** (1974), 1082–1088]

で与えられた．本書の 6–4 c はほぼこの論文に基づく．なお 6–4 の (37) の一般的証明は

(6.23) M. C. Bergère and J. B. Zuber: Commun. Math. Phys. **35** (1974), 113–140.

Ward-Takahashi の関係式のオリジナルな導出は，たとえば

(6.24) H. S. Green: Proc. Phys. Soc. **A 66** (1953), 873–880,

(6.25) E. S. Fradkin: Zh. Eksperim i Teor. Fiz. **29** (1955), 258–261 [英訳は Sov. Phys. JETP **2** (1956), 361–363],

(6.26) Y. Takahashi: Nuovo Cimento **6** (1957) 371–375.

一般的な議論は文献 (3.25) を見よ．

電子の**異常磁気能率**や **Lamb のずれ**などについては，文献 (1.9), (2.7), (3.1) などを見よ．量子電磁力学の実験的験証に関する最近の報告としては

(6.27) B. E. Lautrup, A. Peterman and E. de Rafael: Physics Reports **3** (1972) 193–259,

(6.28) 木下東一郎: 日本物理学会誌 **29** (1974), 471–479.

演習問題解答

演 習 問 題 1.

1.1 Cauchy の定理により C は a を中心とした微小円と考えてよい．$z=a+re^{i\theta}$ とおけば，$dz=ire^{i\theta}d\theta$ だから，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-a}dz=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{i\theta})\,d\theta$$

ここで $r\to 0$ の極限をとればよい．

1.2 $$\int_0^{+\infty} e^{(ip-\varepsilon)x}dx=\frac{-1}{i(p+i\varepsilon)},\qquad \int_{-\infty}^0 e^{(ip+\varepsilon)x}dx=\frac{1}{i(p-i\varepsilon)}$$

であるから，1-1 の (13) を用いればよい．

1.3 第1軸まわりの角 θ の回転は

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & \sin\theta\\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

であるから，この $\theta=0$ での微係数の行列を i で割ったものが第1軸方向の generator になる．他も同様．交換関係は正直に行列の掛け算をやればよい．

1.4 $\hbar/1836m_ec$ を計算すればよい．　答　2.1×10^{-14} cm.

演 習 問 題 2.

2.1 まず $[a,(a^\dagger)^n]=n(a^\dagger)^{n-1}$ を数学的帰納法で証明する．あとは $f(a^\dagger)$ をベキ級数に展開すればよい．

2.2 (37) の証明は，まず $\phi(x)$ の定義式 2-1 の (35) の第2項は (37) にはきかないことに注意してこれを捨てる．そのあと $\phi(x_r)$ を $|0\rangle$ のところまで交換関係を使ってもってくれば，帰納法の仮定と交換子から自動的に証明ができてしまう．(49) の証明はただ符号の変化を考慮するだけのことである．

2.3 $[x^\mu\partial^\nu, x^\rho\partial^\sigma]=g^{\nu\rho}x^\mu\partial^\sigma-g^{\mu\sigma}x^\rho\partial^\nu$ であることを確かめれば，あとは添字のいれかえだけで求める結果が得られる．

2.4 $$\begin{aligned}\Big(\sum_{j=1}^n p_j\Big)^2&=\Big(\sum_{j=1}^n\sqrt{m_j^2+\boldsymbol{p}_j^2}\Big)^2-\Big(\sum_{j=1}^n\boldsymbol{p}_j\Big)^2\\ &\geqq\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n\Big(\sqrt{m_j^2+\boldsymbol{p}_j^2}\sqrt{m_k^2+\boldsymbol{p}_k^2}-|\boldsymbol{p}_j||\boldsymbol{p}_k|\Big)\\ &\geqq\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n m_jm_k=\Big(\sum_{j=1}^n m_j\Big)^2\end{aligned}$$

ここに第1の不等式で等号が成立するのは $\boldsymbol{p}_j$ がすべて平行のとき，第2の不等式で等号が成立するのは $|\boldsymbol{p}_j|/m_j$ が j によらないときである．

2.5 2–5 の (44) を用いて計算すればよい．たとえば $p_0=\omega_{\boldsymbol{p}}$ とするとき，

$$[M^{0l},\ P^{\rho}]=\frac{1}{2}i\int d^3p\ \omega_{\boldsymbol{p}}\Big\{a^{\dagger}(\boldsymbol{p})\frac{\partial}{\partial p_l}[p^{\rho}a(\boldsymbol{p})]-p^{\rho}a^{\dagger}(\boldsymbol{p})\frac{\partial}{\partial p_l}a(\boldsymbol{p})$$
$$-p^{\rho}\frac{\partial a^{\dagger}(\boldsymbol{p})}{\partial p_l}a(\boldsymbol{p})+\frac{\partial}{\partial p_l}[p^{\rho}a^{\dagger}(\boldsymbol{p})]\cdot a(\boldsymbol{p})\Big\}$$
$$=i\int d^3p\ \omega_{\boldsymbol{p}}\frac{\partial p^{\rho}}{\partial p_l}a^{\dagger}(\boldsymbol{p})a(\boldsymbol{p})$$
$$=i(g^{l\rho}P^0-g^{0\rho}P^l)$$

他も同様である．

2.6 ガンマ行列の反交換関係をくり返し使って

$$\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}=\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}-2g^{\mu\sigma}\gamma^{\rho}\gamma^{\nu}+2g^{\nu\sigma}\gamma^{\rho}\gamma^{\mu}-2g^{\mu\rho}\gamma^{\nu}\gamma^{\sigma}+2g^{\nu\rho}\gamma^{\mu}\gamma^{\sigma}$$

を導く．そして $s^{\mu\nu}=\frac{1}{2}i(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}-g^{\mu\nu})$ に注意すれば，

$$[s^{\mu\nu},\ s^{\rho\sigma}]=-\frac{1}{4}[\gamma^{\mu}\gamma^{\nu},\ \gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}]$$
$$=(-i)\left(\frac{1}{2}i\right)[g^{\mu\sigma}(\gamma^{\rho}\gamma^{\nu}-g^{\rho\nu})-g^{\nu\sigma}(\gamma^{\rho}\gamma^{\mu}-g^{\rho\mu})$$
$$+g^{\mu\rho}(\gamma^{\nu}\gamma^{\sigma}-g^{\nu\sigma})-g^{\nu\rho}(\gamma^{\mu}\gamma^{\sigma}-g^{\mu\sigma})]$$
$$=-i(-g^{\mu\sigma}s^{\nu\rho}+g^{\nu\sigma}s^{\mu\rho}+g^{\mu\rho}s^{\nu\sigma}-g^{\nu\rho}s^{\mu\sigma})$$

2.7 公式の証明は，$k_0<0$ の部分の符号を変える変換をすればよい．

$$\frac{i}{\pi}\mathrm{P}\int_{-\infty}^{+\infty}dk_0\cdot k_0^{-1}\exp(-ik_0x_0)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}dk_0\frac{\sin k_0x_0}{k_0}=\epsilon(x_0)$$

2–6 の (25) にこの式と 2–6 の (9) を代入すれば

$$\bar{\Delta}(x\,;m^2)=-\frac{1}{(2\pi)^4}\mathrm{P}\int_{-\infty}^{+\infty}dk_0\frac{e^{-ik_0x_0}}{k_0}\int d^3p\frac{e^{-i\omega_{\boldsymbol{p}}x_0}-e^{i\omega_{\boldsymbol{p}}x_0}}{2\omega_{\boldsymbol{p}}}\cdot e^{i\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}}$$

第 1 項では $k_0+\omega_{\boldsymbol{p}}=p_0$，第 2 項では $k_0-\omega_{\boldsymbol{p}}=p_0$ と変数変換すれば，

$$\bar{\Delta}(x\,;m^2)=-\frac{1}{(2\pi)^4}\mathrm{P}\int d^4p\left[\frac{1}{p_0-\omega_{\boldsymbol{p}}}-\frac{1}{p_0+\omega_{\boldsymbol{p}}}\right]\frac{e^{-ipx}}{2\omega_{\boldsymbol{p}}}$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^4}\mathrm{P}\int d^4p\frac{e^{-ipx}}{m^2-p^2}$$

2.8 F の任意の 1 項は $\prod_{j=1}^{n}\omega_j$ と書ける．ただし ω_j のおのおのは ϕ, $\partial_k\phi$, π のいずれかである．$i\dot{\omega}_j=[\omega_j,\ H]$ から n についての数学的帰納法で

$$i\partial_0\prod_{j=1}^{n}\omega_j=\left[\prod_{j=1}^{n}\omega_j,\ H\right]$$

を示せばよい．

2.9 2–8 の (5) と同じく

$$\langle 0|\psi_{\alpha}(x)\bar{\psi}_{\beta}(y)|0\rangle=\int d^4p\,e^{-ip(x-y)}\sum_{\lambda}\langle 0|\psi_{\alpha}(0)|p,\ \lambda\rangle\langle p,\ \lambda|\bar{\psi}_{\beta}(0)|0\rangle$$

であるが，左辺の変換性から（空間反転不変性により $\gamma_5\gamma^{\mu}p_{\mu}$ や γ_5 は除外される），

$$\sum_{\lambda}\langle 0|\psi_{\alpha}(0)|p,\ \lambda\rangle\langle p,\ \lambda|\bar{\psi}_{\beta}(0)|0\rangle$$
$$=(2\pi)^{-3}\theta(p_0)[(\gamma^{\mu})_{\alpha\beta}p_{\mu}\rho_1(p^2)+\delta_{\alpha\beta}\rho_2(p^2)] \qquad \text{(i)}$$

と書ける．スペクトル条件により

$$\rho_j(p^2)=\int_0^\infty d\kappa^2\delta(\kappa^2-p^2)\rho_j(\kappa^2) \qquad (j=1, 2)$$

とおけば，

$$\langle 0|\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)|0\rangle=\int_0^\infty d\kappa^2[\rho_1(\kappa^2)i(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}\partial_\mu+\delta_{\alpha\beta}\rho_2(\kappa^2)]\Delta^{(+)}(x-y\,;\,\kappa^2)$$

が得られる．

a を実数として，式 (i) に左から $\gamma^\mu p_\mu+a$，右から $(\gamma^\mu p_\mu+a)\gamma^0$ を掛けてトレースをとると，左辺は絶対値の 2 乗の和であるから負になることはない．右辺はこのとき，$(\gamma^\mu p_\mu)(\gamma^\nu p_\nu)=p^2$，および γ^μ と $\gamma^0\gamma^k$ のトレースが 0 になることに注意して計算すると，

$$\theta(p_0)p_0[(p^2+a^2)\rho_1(p^2)+2a\rho_2(p^2)]\geqq 0$$

を得る．そこで $a=-\sqrt{p^2}\,\mathrm{sgn}\,\rho_2(p^2)$ とおけば，$\sqrt{p^2}\rho_1(p^2)\geqq|\rho_2(p^2)|$ となる．

演習問題 3.

3.1 $[A_k(x), A_\nu(y)]$ に **3-3** の (43) を代入し，$z_0=y_0$ とおいて同時刻交換関係 **3-3** の (13), (14) と 4 次元交換関係 **3-3** の (41) を用いると，

$$\begin{aligned}
&[A_k(x), A_\nu(y)]\\
&=\int d^3z[D(x-z)\cdot i\delta_{k\nu}\delta(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y})+(1-\alpha)E(x-z)\overleftrightarrow{\partial^z}_0\partial^z{}_k i\partial^z{}_\nu D(z-y)]|_{z_0=y_0}\\
&=i\delta_{k\nu}D(x-y)+i(1-\alpha)\partial^x{}_k\partial^x{}_\nu E(x-y)
\end{aligned}$$

である．**3-3** の (19) を利用し，$\partial_0{}^2D=\Delta D$ と $\Box E=D$ を使うと，

$$\begin{aligned}
&[A_0(x), A_\nu(y)]\\
&=\int d^3z[D(x-z)\alpha\cdot(-i)\delta_{0\nu}\delta(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y})+(1-\alpha)E(x-z)\overleftrightarrow{\partial^z}_0\partial^z{}_0 i\partial^z{}_\nu D(z-y)]|_{z_0=y_0}\\
&=-i\alpha\delta_{0\nu}D(x-y)+i(1-\alpha)[(1-\delta_{0\nu})\partial^x{}_0\partial^x{}_\nu E(x-y)+\delta_{\nu 0}\Delta E(x-y)]\\
&=-i\delta_{0\nu}D(x-y)+i(1-\alpha)\partial^x{}_0\partial^x{}_\nu E(x-y)
\end{aligned}$$

3.2 **2-6** の (7) から

$$\theta(p_0)\delta(p^2-m^2)=\frac{1}{2}(m^2+\boldsymbol{p}^2)^{-1/2}\delta(p_0-\sqrt{m^2+\boldsymbol{p}^2})$$

であるから，m^2 で微分して $m^2=0$ とおけば

$$\theta(p_0)\delta'(p^2)=\frac{1}{4}[|\boldsymbol{p}|^{-3}\delta(p_0-|\boldsymbol{p}|)+|\boldsymbol{p}|^{-2}\delta'(p_0-|\boldsymbol{p}|)]$$

である．したがって

$$\int d^4p\,\theta(p_0)\delta'(p^2)\,e^{-ipx}=\frac{1}{4}\int d^3p(|\boldsymbol{p}|^{-3}+ix_0|\boldsymbol{p}|^{-2})e^{-i|\boldsymbol{p}|x_0+i\boldsymbol{px}}$$

第 1 項は明らかに $\boldsymbol{p}=0$ の近傍から対数発散する．

3.3 (72) の証明．$p^\mu e^{ipz}=-i\partial^\mu e^{ipz}$ を用いて

$$p^\mu a_\mu(p)=-(2\pi)^{-3/2}\theta(p_0)[I(p)+(1-\alpha)J(p)]$$

と書く．ここに

$$I(p)\equiv\int d^3z\,\delta(p^2)(\partial^\mu e^{ipz})\overleftrightarrow{\partial}_0A_\mu(z)$$

$$J(p)\equiv\int d^3z\,\delta'(p^2)(\partial^\mu e^{ipz})\overleftrightarrow{\partial}_0\partial_\mu B(z)$$

z の積分は空間積分だから，部分積分するさい第 0 成分についてはそのままではや

れないので，

$$\delta(p^2)\partial_0{}^2 e^{ipz}=\delta(p^2)\Delta e^{ipz}$$
$$\delta'(p^2)\partial_0{}^2 e^{ipz}=\delta'(p^2)\Delta e^{ipz}+\delta(p^2)e^{ipz}$$

を利用し，Δ を部分積分し，場の方程式

$$\Box A_0=(1-\alpha)\partial_0 B, \qquad \Box B=0$$

を用いて計算する．

$$I(p)=-\int d^3z\,\delta(p^2)[e^{ipz}\overleftrightarrow{\partial_0}\partial^\mu A_\mu(z)+(1-\alpha)e^{ipz}\partial_0 B(z)]$$
$$J(p)=\int d^3z\,\delta(p^2)e^{ipz}\partial_0 B(z)$$

これをはじめの式に代入し，$\partial^\mu A_\mu=-\alpha B$ を用いると

$$p^\mu a_\mu(p)=-\alpha(2\pi)^{-3/2}\theta(p_0)\int d^3z\,\delta(p^2)e^{ipz}\overleftrightarrow{\partial_0}B(z)=-i\alpha b(p)$$

(73) は自明．(74) も $p^2\delta'(p^2)=-\delta(p^2)$ からすぐ導かれる．ただし第0成分については $\partial_0{}^2 B=\Delta B$ を用いてから部分積分する．

3.4 $x_0\partial_0\int d^4p\,\epsilon(p_0)\delta(p^2)e^{-ipx}=\int d^4p\,\epsilon(p_0)\delta(p^2)p_0\dfrac{\partial}{\partial p_0}e^{-ipx}$

$$=-\int d^4p\left[\frac{\partial}{\partial p_0}|p_0|\delta(p^2)\right]e^{-ipx}=-\int d^4p\,\epsilon(p_0)[\delta(p^2)+2p_0{}^2\delta'(p^2)]e^{-ipx}$$
$$=-\int d^4p\,\epsilon(p_0)[-\delta(p^2)+2\boldsymbol{p}^2\delta'(p^2)]e^{-ipx}$$

を用いればすぐ証明できる．

3.5 $\delta(p^2)$ がかかっているから $\beta(p)$ は $p^2=0$ の上でしか定義されていない．ところが $\delta'(p^2)\beta(p)$ が意味をもつためには $p^2=0$ の近傍での $\beta(p)$ の定義が必要である．したがって，$\hat{\Lambda}^{(+)}(x)$ が定義されたことになっていない．もしも $\beta(p)$ の $p^2\neq 0$ での定義を $\beta(p)=\sqrt{2|\boldsymbol{p}|}\,b(\boldsymbol{p})$ (3-3 の(71)参照) とするならば，$\hat{\Lambda}^{(+)}(x)$ は定義されるが今度は $\beta(p)$ はスカラーであるとはいえない．実際，$\theta(p_0)\delta'(p^2)$ について演習問題3.2の解答で使った式を用いて具体的に計算すれば，

$$\hat{\Lambda}(x)=\frac{1}{2}\Delta^{-1}[x_0\partial_0 B(x)-B(x)]$$

を得る．

3.6 荷電共役 3-4 の (25), (31) を用いると

$$\langle 0|\bar{\psi}_\beta{}'(y)\psi_\alpha{}'(x)|0\rangle=-\sum_{\gamma,\delta}(C^{-1})_{\gamma\beta}\langle 0|\psi_\gamma(y)\bar{\psi}_\delta(x)|0\rangle C_{\alpha\delta}$$

であるが，荷電共役不変性により，左辺は $\langle 0|\bar{\psi}_\beta(y)\psi_\alpha(x)|0\rangle$ に等しい．演習問題2.9で示されたように

$$\langle 0|\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)|0\rangle=\int_0^\infty d\kappa^2[\rho_1(\kappa^2)i(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}\partial^x{}_\mu+\rho_2(\kappa^2)\delta_{\alpha\beta}]\Delta^{(+)}(x-y\,;\,\kappa^2)$$

であるから，3-4 の (29) を用いると

$$\langle 0|\bar{\psi}_\beta(y)\psi_\alpha(x)|0\rangle=-\int_0^\infty d\kappa^2[\rho_1(\kappa^2)(-i)(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}\partial^y{}_\mu+\rho_2(\kappa^2)\delta_{\alpha\beta}]\Delta^{(+)}(y-x\,;\,\kappa^2)$$
$$=\int_0^\infty d\kappa^2[\rho_1(\kappa^2)i(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}\partial^x{}_\mu+\rho_2(\kappa^2)\delta_{\alpha\beta}]\Delta^{(-)}(x-y\,;\,\kappa^2)$$

したがって，2-6 の (34), (18) により

$$\langle 0|\mathrm{T}[\psi(x)\bar{\psi}(y)]|0\rangle=\int_0^\infty d\kappa^2[\rho_1(\kappa^2)i\gamma^\mu\partial^x{}_\mu+\rho_2(\kappa^2)]\Delta_F(x-y\,;\,\kappa^2)$$

3.7 正準交換関係を U_μ, $\dot{U}_\nu$ で表わせば，同時刻交換関係として

$$[U_k,\,U_l]=0,\qquad [U_0,\,U_0]=0,\qquad [U_k,\,U_0]=im_0{}^{-2}\partial^x{}_k\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$$
$$[U_k,\,\dot{U}_l]=i(\delta_{kl}-m_0{}^{-2}\partial^x{}_k\partial^x{}_l)\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$$
$$[U_k,\,\dot{U}_0]=0,\qquad [U_0,\,\dot{U}_l]=0,\qquad [U_0,\,\dot{U}_0]=-im_0{}^{-2}\Delta\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$$

が得られる．これと

$$U_\mu(x)=\int d^3z\,\Delta(x-z\,;\,m_0{}^2)\overleftrightarrow{\partial}^z{}_0U_\mu(z)$$

を用いて正直に計算すればよい．

3.8 Lorentz 共変性と $\partial^\mu U_\mu=0$ と質量 0 の状態のないことから，

$$\langle 0|[U_\mu(x),\,U_\nu(y)]|0\rangle=-i\int_0^\infty d\kappa^2\rho(\kappa^2)(g_{\mu\nu}+\kappa^{-2}\partial^x{}_\mu\partial^x{}_\nu)\Delta(x-y\,;\,\kappa^2)$$

上に与えた同時刻交換関係を使うと

$$i(\delta_{kl}-m_0{}^{-2}\partial^x{}_k\partial^x{}_l)\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})=i\int_0^\infty d\kappa^2\rho(\kappa^2)(\delta_{kl}-\kappa^{-2}\partial^x{}_k\partial^x{}_l)\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$$

これから 3-6 の (40), (41) が得られる．

3.9 $U^{\mathrm{in}}{}_\mu$, B^{in}, φ^{in}, χ^{in} はいずれも中性の場だから，Goldstone ボゾンの χ^{in} を除いて Q と可換であるべきである．実際 3-7 の (61), (50), (53), (54) から

$$[Q,\,U^{\mathrm{in}}{}_\mu]=0,\qquad [Q,\,B^{\mathrm{in}}]=[Q,\,\varphi^{\mathrm{in}}]=0,\qquad [Q,\,\chi^{\mathrm{in}}]=-iM$$

となっている．最後の式は

$$\langle 0|[Q,\,\phi(x)]|0\rangle=ev/\sqrt{2}\qquad (ev=M)$$

とつじつまがあっている．

演習問題 4.

4.1 $\mathcal{L}_I=G\sum_{j=1}^3:\bar{\psi}\gamma^5\tau^{(j)}\psi:\phi^{(j)}$ であるから，注意を要するのはパイ中間子の伝播関数にアイソスピンの Kronecker のデルタを掛けることと，各頂点に γ^5 だけでなく $\tau^{(j)}$ もいれることだけである．$\tau^{(j)}$ はガンマ行列と独立だから全く別にして計算できる．

4.2 アイソスピンに関する陽子への射影演算子は $(1+\tau_3)/2$ である．Møller 散乱の場合と同じ記号を用いると，

$$S^{(2)}_{pp\to pp}=(2\pi)^4iG^2\delta^4(p'+q'-p-q)(2\pi)^{-6}m^2(E_pE_qE_{p'}E_{q'})^{-1/2}$$
$$\times\sum_j\Big\{\bar{u}_{s'}(p')\frac{1+\tau_3}{2}\gamma^5\tau^{(j)}\frac{1+\tau_3}{2}u_s(p)\cdot\bar{u}_{t'}(q')\frac{1+\tau_3}{2}\gamma^5\tau^{(j)}\frac{1+\tau_3}{2}u_t(p)$$
$$\times\frac{1}{\mu^2-(p'-p)^2}-(p'\leftrightarrow q',\ s'\leftrightarrow t')\Big\}$$

4.3 最低次の Feynman 図に 2 つの頂点をつけ加える方法を全部あたってみればよい．Compton 散乱の 4・11 図の各図について，電子の線に 2 頂点を追加することによって得られる図が 6 つ，光子の線に 2 頂点を追加して得られる図が 2 つであるから，総計 16 である．Møller 散乱の 4・12 図の各図については，電子の線に 2 頂点を追加して得られる図が 3×2+2=8 個，光子の線に 2 頂点を追加して得られる図が 1 つで，総計は 18 である．

4.4 まず偏光方向について和および平均をとる．$\hat{\boldsymbol{q}}\equiv\boldsymbol{q}/|\boldsymbol{q}|$, $\hat{\boldsymbol{q}}'\equiv\boldsymbol{q}'/|\boldsymbol{q}'|$ と書くとき，

$$\sum_{\lambda'}\sum_{\lambda}(\epsilon^{(\lambda')}\epsilon^{(\lambda)})^2=\sum_{\lambda'}[(\boldsymbol{\epsilon}^{(\lambda')})^2-(\boldsymbol{\epsilon}^{(\lambda')}\hat{\boldsymbol{q}})^2]=2-[1-(\hat{\boldsymbol{q}}'\hat{\boldsymbol{q}})^2]=1+\cos^2\theta$$

である．したがって，4-4 の (23), (18) から

$$\frac{1}{2}\sum_{\lambda'}\sum_{\lambda}\frac{d\sigma_{e\gamma\to e\gamma}}{d\Omega}=\left(\frac{e^2}{4\pi}\right)^2\frac{|\boldsymbol{q}'|^2}{2m^2|\boldsymbol{q}|^2}\left[\frac{(|\boldsymbol{q}|-|\boldsymbol{q}'|)^2}{|\boldsymbol{q}||\boldsymbol{q}'|}+1+\cos^2\theta\right]$$

これに 4-4 の (22) を代入して積分 $\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta(\cdots)$ をやればよい．計算は初等的である．答は

$$\sigma_{\text{tot}}=\left(\frac{e^2}{4\pi}\right)^2\frac{\pi}{m^2}\left[\log(1+2\nu)\cdot\left(\frac{1}{\nu}-2\frac{1+\nu}{\nu^3}\right)+\frac{4(1+\nu)^2}{\nu^2(1+2\nu)}-\frac{2(1+3\nu)}{(1+2\nu)^2}\right]$$

である．ここに $\nu\equiv|\boldsymbol{q}|/m$.

4.5 $$\Sigma^{(2)}(p)=\frac{G^2}{(2\pi)^4 i}\sum_{j=1}^{3}\int d^4k\,\gamma^5\tau^{(j)}\frac{m+\gamma(p-k)}{m^2-(p-k)^2-i\varepsilon}\gamma^5\tau^{(j)}\frac{1}{\mu^2-k^2-i\varepsilon}$$
$$=3G^2\left[-mF(p^2)\Big|_{\mu_1=m,\ \mu_2=\mu}+\frac{1}{2}\int_{m^2}^{\infty}d\mu_1{}^2\gamma^{\mu}\frac{\partial}{\partial p^{\mu}}F(p^2)\Big|_{\mu_2=\mu}\right]$$

ゆえに $\Sigma^{(2)}=\gamma p\Sigma_1{}^{(2)}+\Sigma_2{}^{(2)}$ と書くとき，4-5 の (14) により

$$\frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\Sigma_1{}^{(2)}(p^2)=\frac{3G^2}{32\pi^2}\cdot\frac{(p^2+m^2-\mu^2)\sqrt{R(p^2)}}{(p^2)^2}\theta(p^2-(m+\mu)^2)$$

$$\frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\Sigma_2{}^{(2)}(p^2)=-\frac{3G^2m}{16\pi^2}\cdot\frac{\sqrt{R(p^2)}}{p^2}\theta(p^2-(m+\mu)^2)$$

ただし $R(p^2)\equiv[p^2-(m-\mu)^2][p^2-(m+\mu)^2]$.

4.6 与式から

$$\rho_1{}^{(2)}(\kappa^2)=(\kappa^2-m^2)^{-2}[(\kappa^2+m^2)\pi^{-1}\operatorname{Im}\Sigma_1{}^{(2)}(\kappa^2)+2m\pi^{-1}\operatorname{Im}\Sigma_2{}^{(2)}(\kappa^2)]$$
$$\rho_2{}^{(2)}(\kappa^2)=(\kappa^2-m^2)^{-2}[2m\kappa^2\pi^{-1}\operatorname{Im}\Sigma_1{}^{(2)}(\kappa^2)+(\kappa^2+m^2)\pi^{-1}\operatorname{Im}\Sigma_2{}^{(2)}(\kappa^2)]$$

である．これに前問の結果を代入すると

$$\rho_1{}^{(2)}(\kappa^2)=\frac{3G^2}{32\pi^2}\cdot\frac{(\kappa^2+m^2)(\kappa^2+m^2-\mu^2)-4m^2\kappa^2}{\kappa^4(\kappa^2-m^2)^2}\sqrt{R(\kappa^2)}\,\theta(\kappa-m-\mu)$$

$$\rho_2{}^{(2)}(\kappa^2)=-\frac{3G^2}{32\pi^2}\cdot\frac{2m\mu^2}{\kappa^2(\kappa^2-m^2)^2}\sqrt{R(\kappa^2)}\,\theta(\kappa-m-\mu)$$

となる．$\kappa\geqq m+\mu$ に対し

$$(\kappa^2+m^2)(\kappa^2+m^2-\mu^2)-4m^2\kappa^2=(\kappa-m)^2(\kappa+m)^2-\mu^2(\kappa^2+m^2)\geqq 2m\kappa\mu^2$$

だから，たしかに不等式はぎりぎりで成立している．

量子電磁力学のときは不定計量の Hilbert 空間を使っているから不等式は成立しない．

4.7 $$\frac{1}{4}\int_{m^2}^{\infty}d\mu_1{}^2\frac{\partial}{\partial p^{\mu}}\int_{m^2}^{\infty}d\mu_2{}^2\frac{\partial}{\partial q_{\nu}}\theta(\alpha(1-\alpha)(p-q)^2-\alpha\mu_1{}^2-(1-\alpha)\mu_2{}^2)|_{q=0}$$
$$=-\left\{\frac{1}{2}g_{\mu\nu}[\alpha(1-\alpha)p^2-m^2]+\alpha(1-\alpha)p_{\mu}p_{\nu}\right\}\theta(\alpha(1-\alpha)p^2-m^2)$$

であるから

$$\pi^{-1}\operatorname{Im}T_{\mu\nu}(p)$$
$$=-(4\pi)^{-2}\int_{\alpha_-}^{\alpha_+}d\alpha\left\{\frac{1}{2}g_{\mu\nu}[\alpha(1-\alpha)p^2-m^2]+\alpha(1-\alpha)p_{\mu}p_{\nu}\right\}\theta(p^2-4m^2)$$

を計算すればよい．ここに $\alpha_\pm \equiv \frac{1}{2}(1\pm\sqrt{1-4m^2/p^2})$．

4.8 $r=1$ のときは自明の式であるから，帰納法の仮定として 4-6 の (37) が成立するとする．4-5 の (2) を A について $r-1$ 回偏微分して得られる式

$$\frac{1}{A^rB}=r\int_0^1\frac{\beta^{r-1}d\beta}{[\beta A+(1-\beta)B]^{r+1}}$$

を用いると，

$$\prod_{j=1}^{r+1}\frac{1}{A_j}=\left(\prod_{j=1}^{r}\frac{1}{A_j}\right)\frac{1}{A_{r+1}}$$

$$=r!\int_0^\infty d\alpha_1'\cdots\int_0^\infty d\alpha_r'\int_0^1 d\beta\frac{\delta\left(1-\sum_{j=1}^{r}\alpha_j'\right)\beta^{r-1}}{\left[\beta\sum_{j=1}^{r}\alpha_j'A_j+(1-\beta)A_{r+1}\right]^{r+1}}$$

となる．ここで $\beta\alpha_j'=\alpha_j$, $1-\beta=\alpha_{r+1}$ と変数変換すれば，

$$\delta\left(1-\sum_{j=1}^{r}\alpha_j'\right)=\beta\cdot\delta\left(\beta-\sum_{j=1}^{r}\alpha_j\right)=\beta\cdot\delta\left(1-\sum_{j=1}^{r+1}\alpha_j\right)$$

であるから

$$\prod_{j=1}^{r+1}\frac{1}{A_j}=r!\int_0^\infty d\alpha_1\cdots\int_0^\infty d\alpha_r\int_0^1 d\alpha_{r+1}\frac{\delta\left(1-\sum_{j=1}^{r+1}\alpha_j\right)}{\left(\sum_{j=1}^{r+1}\alpha_jA_j\right)^{r+1}}$$

を得る．デルタ関数があるおかげで自動的に $\alpha_{r+1}\leqq 1$ になっているから，その積分の上限を $+\infty$ にしてもかまわない．つまり 4-6 の (37) の r を $r+1$ におきかえた式が得られた．

演習問題 5.

5.1 導き方は 5-1 の (42) のときと同じだから結果のみを与えておく．

$$I=\frac{\Gamma\left(N-\frac{1}{2}\nu\kappa+k\right)}{2^{\nu\kappa}\pi^{\nu\kappa/2}(k-1)!}\Lambda^k\int_0^\infty d\alpha_0\left(\prod_l\int_0^\infty d\alpha_l\right)\frac{\alpha_0^{k-1}\delta(1-\alpha_0-\sum_l\alpha_l)}{U^{\nu/2}(V+\alpha_0\Lambda-i\varepsilon)^{N-(\nu\kappa/2)+k}}$$

なお $N-\frac{1}{2}\nu\kappa>0$ のときには，上式で $\alpha_l=(1-\alpha_0)\alpha_l'$ と変換すれば α_0 積分は第 1 種 Euler 積分になってただちに 5-1 の (42) に帰着することがわかる．

5.2 この図の内線の部分は 5·2 図の内線の部分と同じである．したがって，その U は 5-2 の (6) で与えられる．

5.3 $U=(\alpha_1+\alpha_3)\alpha_4+\alpha_4(\alpha_2+\alpha_5)+(\alpha_2+\alpha_5)(\alpha_1+\alpha_3)$

$$V=\sum_{j=1}^{5}\alpha_j(m_j^2-q_j^2)+U^{-1}[(\alpha_1+\alpha_3)(\alpha_2q_2+\alpha_4q_4-\alpha_5q_5)^2$$
$$+(\alpha_2+\alpha_5)(\alpha_1q_1+\alpha_3q_3-\alpha_4q_4)^2+\alpha_4(\alpha_1q_1+\alpha_3q_3-\alpha_5q_5+\alpha_2q_2)^2]$$
$$=\sum_{j=1}^{5}\alpha_jm_j^2-U^{-1}[\alpha_1\alpha_3(\alpha_2+\alpha_4+\alpha_5)(q_1-q_3)^2$$
$$+\alpha_2\alpha_5(\alpha_1+\alpha_3+\alpha_4)(q_2+q_5)^2+\alpha_3\alpha_4\alpha_5(q_3+q_4+q_5)^2+$$

$$+\alpha_2\alpha_3\alpha_4(q_2-q_3-q_4)^2+\alpha_1\alpha_4\alpha_5(q_1+q_4+q_5)^2+\alpha_1\alpha_2\alpha_4(q_1-q_2+q_4)^2]$$

5.4 電子の4次の自己エネルギーの Feynman 図は 5·1 図で点線を波線におきかえたものにほかならないから，U, Y_1 Y_2, Y_3, X_{12}, X_{23}, X_{31} は 5-2 の (5) と (46)～(51) で与えられる．また

$$V=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)m^2-(W/U)p^2$$

で，W は 5-2 の (40) の角括弧内の式である．その Feynman 積分は公式 5-1 の (33), (39) により

$$e^4I=\frac{ie^4}{(4\pi)^4}\int_0^\infty d\alpha_1\cdots\int_0^\infty d\alpha_5\frac{e^{-iV-\varepsilon(\alpha)}}{U^2}[\gamma^\nu(m+\gamma Y_3)\gamma^\mu(m+\gamma Y_2)\gamma_\nu(m+\gamma Y_1)\gamma_\mu$$
$$+(i/2)(X_{12})\gamma^\nu(\gamma Y_3)\gamma^\mu\gamma^\sigma\gamma_\nu\gamma_\sigma\gamma_\mu+(i/2)(X_{31})\gamma^\nu\gamma^\sigma\gamma^\mu(\gamma Y_2)\gamma_\nu\gamma_\sigma\gamma_\mu$$
$$+(i/2)(X_{23})\gamma^\nu\gamma^\sigma\gamma^\mu\gamma_\sigma\gamma_\nu(\gamma Y_1)\gamma_\mu]$$

ただし (X_{ij}) は X_{ij} の計量テンソルを除いた部分を示す．

5.5 U の位相公式から

$$U\leqq\sum_K\prod_{l\in K}\alpha_l$$

ただし K は κ 個の内線の集合で，和はすべてのそのような集合についてとる．右辺は α の対称関数だから Δ においてすべての α_l が相等しいところで最大値をとる．すなわち $\alpha_l=1/N$ を代入すればよい．

5.6
$$I=\frac{(N-\kappa-1)!}{(4\pi)^\kappa}\left(\prod_l\int_0^\infty d\alpha_l\right)\frac{\delta(1-\sum_l\alpha_l)}{U\cdot V^{N-\kappa}}$$
$$\geqq\frac{(N-\kappa-1)!}{(4\pi)^\kappa}\cdot\frac{\kappa!(N-\kappa)!N^\kappa}{N!V_0^{N-\kappa}}\cdot\frac{1}{(N-1)!}$$

5.7 n が十分大きいとき，$N\sim mn/2$, $\kappa\sim(m-2)n/2$ である．前問の結果にこれを代入し，階乗に対して Stirling の公式 $k!\sim e^{-k}k^k$ を適用すると，

$$I\gtrsim a^n\qquad(a>0)$$

を得る．ただし a は n に無関係な常数である．n 次の Feynman 積分はすべて同符号で a^n 以上なのであるから，その個数が $n^{(m-2)n/2}$ のように増大すれば $m\geqq3$ のとき摂動級数の収束半径は 0 である．

5.8 この積分は Lorentz 不変だから $\boldsymbol{p}=0$ の系で考える．

$$(2\pi)^{-1}\operatorname*{disc}_{s=p^2}F(s)=(2\pi)^{-3}\int d^4k\frac{1}{2\omega_1}\delta(p_0-k_0-\omega_1)\frac{1}{2\omega_2}\delta(k_0-\omega_2)$$
$$=\frac{1}{8\pi^2}\int_0^\infty d|\boldsymbol{k}|\frac{|\boldsymbol{k}|^2}{\omega_1\omega_2}\delta(p_0-\omega_1-\omega_2)$$

ただし $\omega_j\equiv\sqrt{\mu_j^2+\boldsymbol{k}^2}$ $(j=1,2)$．$(d/d|\boldsymbol{k}|)(p_0-\omega_1-\omega_2)=-|\boldsymbol{k}|(\omega_1+\omega_2)/\omega_1\omega_2$ だから

$$(2\pi)^{-1}\operatorname*{disc}_{s=p^2}F(s)=\frac{\theta(p_0-\mu_1-\mu_2)}{8\pi^2p_0}\cdot\frac{[(p_0^2-\mu_1^2-\mu_2^2)^2-4\mu_1^2\mu_2^2]^{1/2}}{2p_0}$$

$p_0=\sqrt{p^2}$ を代入すれば 4-5 の (14) と一致する．

5.9 核子の質量を m_N, quark の質量を m_q とすると，5-4 の (34) から異常しきい値のでないための条件は

$$(2m_q)^2+m_q^2\geqq m_N^2$$

すなわち，m_q は $m_N/\sqrt{5}$ よりも大きくなくてはならない．

演習問題 6.

6.1 5-1 の (42), (44) と位相公式から

$$\Pi_{\mu\rho}^{(2)}(p)=-e^2\frac{\Gamma(2-\nu/2)}{2^\nu\pi^{\nu/2}}\int_0^1 d\alpha\left[\frac{\mathrm{tr}\{[m+(1-\alpha)(\gamma p)]\gamma_\rho[m-\alpha(\gamma p)]\gamma_\mu\}}{[m^2-\alpha(1-\alpha)p^2-i\varepsilon]^{2-\nu/2}}+\frac{1}{-2+\nu}\cdot\frac{\mathrm{tr}(\gamma^\sigma\gamma_\rho\gamma_\sigma\gamma_\mu)}{[m^2-\alpha(1-\alpha)p^2-i\varepsilon]^{1-\nu/2}}\right]$$

第1項のトレースを計算すると

$$f(\nu)[m^2g_{\mu\rho}-\alpha(1-\alpha)(2p_\mu p_\rho-p^2g_{\mu\rho})]$$

第2項の分子は $f(\nu)(2-\nu)g_{\mu\rho}$ だから，通分すると

$$\Pi_{\mu\rho}^{(2)}(p)=-e^2\frac{\Gamma(2-\nu/2)}{2^\nu\pi^{\nu/2}}f(\nu)(p^2g_{\mu\rho}-p_\mu p_\rho)\int_0^1 d\alpha\frac{2\alpha(1-\alpha)}{[m^2-\alpha(1-\alpha)p^2-i\varepsilon]^{2-\nu/2}}$$

となり，ゲージ不変性が自動的に保障される．積分は $m=0$ のとき第1種 Euler 積分である．$\Pi_{\mu\rho}^{(2)}(p)$ の $m\neq0$ のときと $m=0$ のときとの差は $\nu\to4$ で有限である．

6.2 5-1 の (33) から $\nu=4$ のとき

$$I=\mathrm{const}\int_0^\infty d\alpha_1\int_0^\infty d\alpha_2\int_0^\infty d\alpha_3\frac{e^{iQ}}{U^2}\exp\left[-i\sum_{j=1}^3\alpha_j(m_j^2-i\varepsilon_j)\right]$$

ここに $U=\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_3\alpha_1$, $Q=(\alpha_1\alpha_2\alpha_3/U)p^2$．全体の見かけの発散は2次だから，$p^2$ の1次式を引き算しなければならない．

$$e^{iQ}-1-iQ\equiv Q^2\varphi(Q)$$

と書けば，$\varphi(Q)$ は Q につき正則．$\alpha_1=\alpha_2=0$, $\alpha_3\neq0$ のとき U は1次のゼロとなって I は内部からの対数発散をもつが，上の引き算をすると Q^2/U^2 はそのとき有界である．

6.3 $[B^{\mathrm{ren}},\bar\psi^{\mathrm{ren}}]$ の符号だけを注意すれば，あとは全く同じことである．結果は

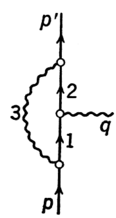
$$-i(p'^\mu-p^\mu)\Gamma_5{}^{\mathrm{ren}}{}_\mu(p',p)=[S_F{}^{\mathrm{ren}}(p')]^{-1}\gamma_5+\gamma_5[S_F{}^{\mathrm{ren}}(p)]^{-1}$$

6.4 Lorentz 共変性と空間反転不変性により，添字 μ をもつ一次独立な量は $\bar u(p')\gamma_\mu u(p)$, $\bar u(p')(p_\mu+p_\mu')u(p)$, $\bar u(p')q_\mu u(p)$ の3つである．なぜなら，γp や $\gamma p'$ はガンマ行列の反交換関係と Dirac 方程式 6-6 の (2) を用いると必ず消去できるからである．第3のものは q^μ を掛けても0にならないからゲージ不変でない．第2のものは 6-6 の (5) を使って書き直せる．

6.5 右図に関して，$U=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1$,

$$V=(\alpha_1+\alpha_2)m^2-\alpha_1\alpha_3p^2-\alpha_2\alpha_3p'^2-\alpha_1\alpha_2q^2$$

であるが，$p^2=p'^2=m^2$ とおき，q^2 依存性は不要だから無視すると，



$$V=(1-\alpha_3)^2m^2$$

と書ける．分子では，X_{12} に比例する項は運動量を全く含まないので無視してよいから，

$$\bar u(p')\gamma_\nu(m+\gamma Y_2)\gamma_\mu(m+\gamma Y_1)\gamma_\rho u(p)(-g^{\nu\rho})$$

(ここに $Y_1=(\alpha_2+\alpha_3)p-\alpha_2p'$, $Y_2=(\alpha_1+\alpha_3)p'-\alpha_1p$)

だけを Dirac 方程式 6-6 の (2) を用いて計算すればよい．$\bar u\gamma_\mu u$ に比例する項を

無視すると，

$$-4m[(-\alpha_1{}^2+\alpha_2{}^2+\alpha_2\alpha_3)p_\mu+(\alpha_1{}^2-\alpha_2{}^2+\alpha_1\alpha_3)p_\mu{}']\bar{u}(p')u(p)$$

を得る．分母は α_1 と α_2 について対称だから，分子のどの項で α_1 と α_2 とをいれかえても積分の値は変わらない．ゆえに上の式は

$$-2m\alpha_3(1-\alpha_3)\bar{u}(p')(p_\mu+p_\mu{}')u(p)$$

と同等である．さらにこれは **6-6** の (5) により，$\bar{u}\gamma_\mu u$ に比例する項を除き，

$$4m^2\alpha_3(1-\alpha_3)\cdot\bar{u}(p')(-1/4m)(\gamma_\mu\gamma_\nu-\gamma_\nu\gamma_\mu)q^\nu u(p)$$

に等しい．したがって，**5-1** の (42) に分子を挿入して次の式を得る．

$$F_2{}^{(2)}(0)=\frac{(e^{\rm ren})^2}{2^4\pi^2}\int_0^1 d\alpha_1\int_0^1 d\alpha_2\int_0^1 d\alpha_3\frac{4\alpha_3\delta(1-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)}{1-\alpha_3}$$

$\alpha_1=xy$，$\alpha_2=(1-x)y$，$\alpha_3=1-y$ と変数変換すれば

$$F_2{}^{(2)}(0)=\frac{4(e^{\rm ren})^2}{2^4\pi^2}\int_0^1 y\,dy\int_0^1 dx\frac{1-y}{y}=\frac{(e^{\rm ren})^2}{8\pi^2}$$

索　引

この索引の術語は本文中で*印を付してあるものである．

あ

isoscalar　89
isospinor　89
アイソスピン　36
　——群　89
isovector　89
Einstein 因果律　60
Einstein の規約　20
out-state　96
R 演算　277
R 積　92

い

閾値　239
異常しきい値　241
異常磁気能率　294
位相　16
位相公式　213
一次独立　10
一致の定理　4
一般化された固有状態　107
一般化された Feynman の恒等式　203
一般相対論　18
improper　257
in-state　96

う

Wick の定理　168
Umezawa-Kamefuchi-Källén-Lehmann 表示　94

え

S 行列　39,96
　——理論　39
SU(3) 対称性　36
N 積　166
エネルギー運動量テンソル密度　64
エネルギー運動量保存則　35
LSZ 形式　97
Hermite 共役　13
Hermite 行列　13
Hermite 的　13
演算子　12

お

off mass shell　191
オメガ　33
on mass shell　191

か

解析関数　5
解析接続　5
解析的　3
外線　170
回転群　15
chiral dynamics　42
開領域　2
回路　207
　——指標　207
　——表示　219
可換　28
角運動量テンソル密度　298
角運動量保存則　35
核子　33
核民主主義　40
確率解釈　25
確率の保存　25
Casimir 演算子　54

カット　6
Cutkosky 規則　236
荷電共役　35,128
荷電スカラー場　69
荷電独立　88
荷電保存則　35
可分　16
カレント代数　42
関数関係の不変性　5
慣性系　18
完全可約　18
完全規格化直交系　49
完全性　49
完全反対称擬テンソル　20
完備　16
ガンマ行列　72

き

擬 Hermite 行列　13
規格化　25
　——直交系　12
擬樹木　215
擬スカラー場　62
期待値　90
擬直交群　15
基底　11
基底運動量　180
軌道角運動量　31
擬微分方程式　231
基本回路系　216
着物を着ている　93
既約（群の表現の）　18
　（Feynman 図の）　259
旧式摂動論　166
q 数　28
擬 unitary 行列　13
境界条件　26
境界値　7
共変性　19
共変ベクトル　19
強粒子　33
行列表現　12
強連結　220
極　6
極小相互作用　127
局所可換性　60
局所反可換　61
極大観測　29
Kirchhoff の法則　225
近傍　2

く

空間的　21
　——超曲面　157
空間反転　20,35
偶奇性　35
空孔理論　31
Coulomb ゲージ　101
quark 模型　41
グザイ　33
Gupta の補助条件　102
Gupta-Bleuler 形式　103
Krein 空間　17
Klein-Gordon の方程式　62
Klein-Nishina の公式　187
くりこみ　37
　——可能　255
　——群　42,288
　——項　254
　——常数　257
　——不可能　255
　——理論　254
Green 関数　82,164
Kronecker のデルタ　11
群　14
　——の表現　17

け

K 図　200
ケイ中間子　32
軽粒子数保存則　35
計量テンソル　20
gaugeon　124

ゲージ
——・パラメーター　112
——不変性　23
——変換　23
——理論　42
結合エネルギー　26
結合常数　33,86
ケット・ベクトル　45
弦模型　41

こ

光円錐物理　42
光学定理　163
交換関係　28
交換子　24
交差対称性　40,170
光子　32
Cauchy の主値　8
Cauchy の積分表示　4
Cauchy の定理　3
光錐的　21
構成的場の理論　38
構造常数　15
光速度不変の原理　18
恒等表現　17
後方　21
公理論的場の理論　38
個数演算子　45
ghost　107
Goto-Imamura の矛盾　136
Compton 散乱　184
complex ghost　108
固有関数　26
固有値　26,28
——問題　26
固有ベクトル　26
Goldstone の定理　144
Goldstone ボゾン　144
Goldstone 模型　147

さ

佐藤の超関数　8
散乱振幅　37
散乱問題　26

し

generator　15
紫外異変　247
紫外発散　247
時間順序積　160
時間的　21
時間反転　20,35
しきい値　239
磁気量子数　26
シグマ　33
次元　10,15
自己エネルギー　190,257
自己質量　175
c 数　28
次数勘定定理　249
自然境界　5
自然単位　31
実特異点　238
実ベクトル空間　10
質量　21
——のくりこみ常数　257
シート　5
自発的対称性の破れの理論　42
自発的な破れ　144
CPT 定理　36
弱極限　96
Schwinger 項　136
重核子　33
終状態　161
従特異点　233
自由場　61
重複発散　261
自由 Lagrangian 密度　85
重粒子　33
——数保存則　35

縮退（空間の）　11
　（固有値の）　28
縮約図　218
主特異点　233
樹木　215
主量子数　26
Schrödinger の波動関数　24
Schrödinger 表示　27
Schrödinger 方程式　23
Schwarz の鏡像原理　7
Schwartz の超関数　8
常しきい値　240
状態　44
　——符号因子　173
消滅演算子　46
初期状態　161
Johnson の定理　140
真空　45
　——期待値　90
　——偏極　162
真性特異点　6

す

スカラー　20
　——光子　121
　——積　11
　——場　62
Steuckelberg 形式　134
ストレンジネス　35
スピノル解析　60
スピノル場　71
スピン　31
　——角運動量　31
　——と統計の関係　36
スペクトル関数　92
スペクトル条件　58
スペクトル表示　9,92

せ

正エネルギー部分　66
正規積　166
静止質量　21
正準エネルギー運動量テンソル密度
　298
正準形式の場の量子論　63
正準交換関係　28,64
正準量子化　64
生成演算子　46
正則　3
正定値　12
赤外異変　195
赤外発散　195
積分可能条件　158
積分路　3
接合指標　177
接触項　180
切断　268
切断集合　219
　——指標　220
　——表示　221
切断パラメーター　268
摂動級数　165
摂動展開　37
摂動論　166
遷移行列　162
遷移振幅　39
漸近場　95
線形演算子　12
線形表現　18
全断面積　163
前方　21

そ

相互作用 Hamiltonian 密度　87
相互作用表示　156
相互作用 Lagrangian 密度　85
相対論的量子力学　31
双対共鳴模型　41
双対図　243
双対性　41
相変換　124
束縛状態　26

素粒子　31

た

第1種ゲージ変換　125
第1種相互作用　86
第1種特異性　201
対称エネルギー運動量テンソル密度　299
対称行列　13
対称性　35
——因子　172
代数的特異点　6
Dyson の S 行列　162
Dyson の積分方程式　260
第2型特異点　232
第2種ゲージ変換　127
第2種相互作用　86
第2種特異性　201
第二量子化　44
dipole ghost　109
τ 関数　164
多価　5
タキオン　58
多時間形式　157
多重極　6
タテ波光子　121
d'Alembertian　22
単回路 Feynman 図　237
単純極　6
端点　170
——特異性　230
断熱因子　161
断熱仮設　161

ち

逐次代入法　160
チャンネル　40,223
中間子　32
中間状態　219
中性　63
中性子　33
中性微子　32
超関数　7
超くりこみ可能　255
超光速粒子　58
超多時間形式　157
頂点　170
——のくりこみ常数　257
——表示　223
——部分　259
直交　11
——行列　13
——群　15
——条件　11
直接結合　86

つ

通路　215
強い相互作用　33

て

discontinuity　7
Dirac 演算子　71
Dirac の記法　45
Dirac のデルタ関数　8
Dirac 場　71
Dirac 方程式　31,71
T 行列　162
T 積　92,136,160
定常状態　26
電荷演算子　126
電子　32
電磁形状因子　293
電磁相互作用　33
電磁場テンソル　22
電流保存則　22

と

導関数　3
統計因子　171
特異点　5
特殊線形群　15

特殊相対性原理　19
特殊相対論　18
特殊直交群　15
特殊 unitary 群　15
Tomonaga-Schwinger 方程式
158
triangle anomaly　272

な

内積　11
内線　170
Nambu-Goldstone ボゾン　144
軟光子　195

に

2階テンソル　20
二重分散式　39
2樹木　220
ニュートリノ　32

ね

Nevanlinna 空間　17
Noether の定理　125

の

ノルム(数学的)　16
(不定計量空間の)　107
——空間　16

は

Heisenberg 演算子　27,88
Heisenberg 表示　27
Heisenberg 方程式　28
排他原理　36
パイ中間子　32
Pauli 項　128
Pauli のスピン行列　30
Haag-Ruelle の散乱理論　38
はだか　93
——の確率　93
——の質量　87
発散の困難　37
波動関数のくりこみ常数　257
場の演算子　59
場の方程式　86
場の量子化　44
場の量子論　37
Bhabha 散乱　189
Hamiltonian　23
——演算子　25
——密度　64
パラ統計　36,52
para-Bose 統計　52
para-Fermi 統計　52
パリティ　35
反可換　51
反交換関係　51
反交換子　50
反変ベクトル　19
反粒子　35

ひ

Higgs 現象　150
Higgs 模型　149
微細構造常数　34
微視的因果律　60
非斉次 Lorentz 群　53
非特異　13
微分可能　2
微分結合　86
微分断面積　163
表現空間　18
表現の次元　18
Hilbert 空間　17
Hilbert 変換　9
pinch　230

ふ

Feynman 規則　176
Feynman 経路積分　42
Feynman ゲージ　112
Feynman の恒等式　191

Feynman 図 170
Feynman 積分 190
Feynman 伝播関数 169
Feynman の切断法 268
Feynman パラメーター 191
——公式 205
Furry の定理 183
負エネルギー部分 66
フェルミオン 36
Fermi ゲージ 112
Fermi 統計 36
Fermi の補助条件 102
Fock 空間 48
不確定性原理 29
複合模型 41
複合粒子 40
複素関数 2
複素次元の方法 271
複素スカラー場 69
複素積分 3
複素ベクトル空間 10
複素変数 1
物理的質量 87
物理的シート 232
物理的状態 111
不定計量 12
——の Hilbert 空間 17
bootstrap 40
不変性 34
不変デルタ関数 69
不変部分空間 18
ブラ・ベクトル 45
Planck の常数 23
Proca 形式 134
Proca 場 135
Froissart-Martin の上界 38
proper 257
——な頂点部分 259
Bloch-Nordsieck の定理 196
分岐切断線 6
分岐点 6
分散公式 37
分離可能 234
分離線 220

へ

平行 11
閉領域 2
べキ級数 4
ベクトル 10,20
——空間 10
helicity 57

ほ

Poincaré 群 53
方位量子数 26
崩壊確率 163
補樹木 213
補助条件 102
Bose 統計 36
補正 190
——された伝播関数 258
ボゾン 36
保存則 35
保存電流 125
保存量 29,35
homology 論 231
本義 Lorentz 群 20

ま

Maxwell 方程式 21
multipole ghost 109

み

見かけの発散の次数 248
ミュー粒子 32
——数保存則 35
Minkowski 空間 19

む

無限遠点 2
無限次元 10

め

Møller 散乱　187

や

Yang-Feldman の方程式　95
Yang-Mills 場　142

ゆ

Euclidean　239
有限エネルギー和則　41
有限化　268
有限くりこみ　275
有限次元　10
有限部分　274
unitary 群　15
unitary 的　13

よ

陽子　33
ヨコ波光子　121
4 次元運動量　21
——演算子　54
4 次元角運動量演算子　54
4 次元交換関係　69
4 次元電磁ポテンシャル　22
4 次元電流　22
弱い相互作用　33

ら

Lagrangian　63
——密度　63
radiation ゲージ　101
ラムダ　33
Lamb のずれ　295
Landau ゲージ　112
Landau 特異点　232
Landau-Nakanishi 特異点　232
Landau 方程式　233

り

Lie 環　15
Lie 群　15
離散的固有値　27
Riesz の有限部分　275
little group　55
Riemann 面　5
留数　6
領域　1
量子化　24
量子数　26,35
量子電磁力学　37

る

ループ　174,207
——符号因子　174

れ

regulator　269
Regge 軌跡　41
Regge 極　40
——理論　40
Regge 的振る舞い　41
Lehmann-Symanzik-Zimmermann 形式　97
Lehmann 表示　94
連結度　180
連続　2
連続的固有値　27

ろ

Laurent 級数　6
Lorentz 群　20
Lorentz 条件　23
Lorentz 変換　19

わ

Wightman 関数　90
Wightman の公理系　38
Ward の関係式　264
Ward-Takahashi の関係式　290

中 西 襄 略歴
なか にし のぼる

1932年 京都市に生まれる
1955年 京都大学理学部物理学科卒業
1960年 京都大学理学博士
1961～63年 Institute for Advanced Study (Princeton) 研究員
1963～65年 Brookhaven National Laboratory 研究員(Physicist)
1966年 京都大学数理解析研究所助教授

主要著書

A General Survey of the Theory of the Bethe-Salpeter Equation (理論物理学刊行会, 1969年)

Graph Theory and Feynman Integrals (Gordon and Breach, New York, 1971年)

Indefinite-Metric Quantum Field Theory (理論物理学刊行会, 1972年)

昭和50年 9月30日 初 版 発 行
昭和57年 10月30日 初版第6刷発行

新物理学シリーズ 19

場 の 量 子 論

著 者 中西 襄
発行者 山本健二

発行所 株式会社 培 風 館
東京都千代田区九段南 4-3-12・郵便番号 102
電話 (03) 262-5256 (代表)・振替東京 4-44725

定価 ¥ 3800.

日東紙工印刷・三水舎製本

ISBN4-563-02419-8
C3342 ¥3800E